This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

Math
9109
01.4

HARVARD
UNIVERSITY
LIBRARY

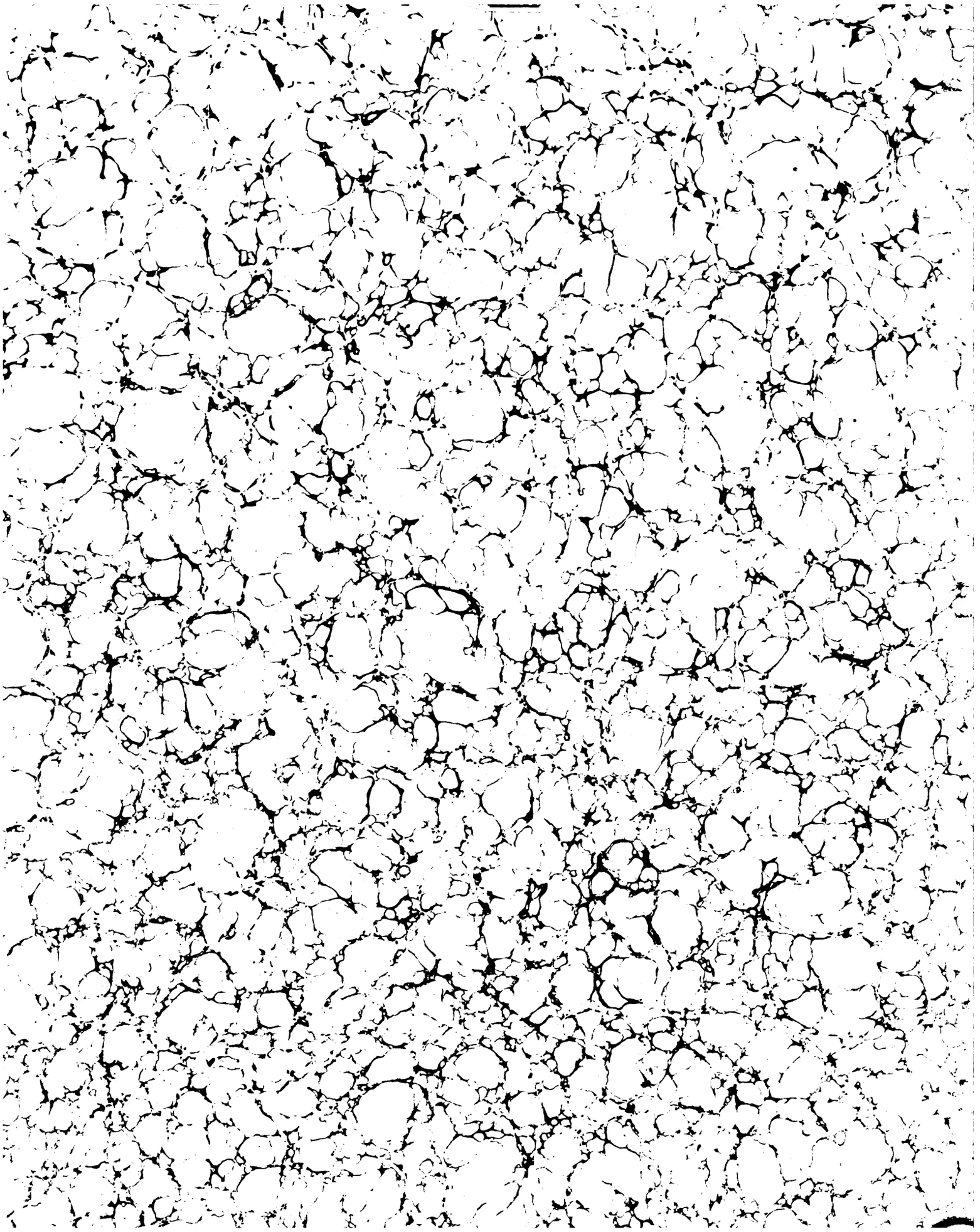
Math 9109.01.4

SCIENCE CENTER LIBRARY

FROM THE FUND OF

CHARLES MINOT

Class of 1828



3, PLACE DE LA SORBONNE, PARIS
Librairie ALBERT SCHULZ
Importation en France
des livres et journaux étrangers
Exportation à l'Etranger
des livres et journaux français
et des publications de tous pays
Achat de Bibliothèques

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

Par M. l'abbé H. LACAZE,
Agrégé de l'Université.

1re THÈSE. — Sur la connexion linéaire de quelques surfaces algébriques.
2e THÈSE. — Propositions données par la Faculté.

Soutenues le mai 1901, devant la Commission d'examen.

MM. LEGOUX, *Président.*
COSSERAT, DELASSUS, *Examinateurs.*

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS,
Quai des Grands-Augustins 55.
1901

Math ~~3609.01.8~~
2 9109.01.4

HARVARD COLLEGE
JUL 17 1905
LIBRARY.
Minot fund.

UNIVERSITÉ DE TOULOUSE.

FACULTÉ DES SCIENCES.

PERSONNEL.

	MM.	
ADMINISTRATION	LECLERC DU SABLON.	Doyen.
	SABATIER	Assesseur.
HONORARIAT	CLOS	Professeur honoraire.
PROFESSEURS	BAILLAUD	Doyen honoraire. Astronomie.
	LEGOUX	Mécanique rationnelle et appliquée.
	SABATIER	Chimie.
	MOQUIN-TANDON	Zoologie.
	DESTREM	Chimie.
	LECLERC DU SABLON.	Botanique.
	ROULE	Histoire naturelle.
	MATHIAS	Physique.
	COSSERAT	Calcul différentiel et intégral.
	BOUASSE	Physique.
	PRUNET	Botanique agricole.
	BERTRAND	Géologie et Minéralogie.
PROFESSEURS ADJOINTS	CARALP	Géologie et Minéralogie.
	FABRE	Chimie agricole et industrielle.
	PARAF	Mathématiques.
	COTTON	(Suppléant à l'École Normale Supérieure).
CHARGÉ DE COURS COMPLÉMENTAIRES	DELASSUS	Mathématiques.
MAITRES DE CONFÉRENCES.	JAMMES	Zoologie.
	BOURGET	Mathématiques.
	CAMICHEL	Physique.
SECRÉTARIAT	CHAUDRON.	

30138 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

A

Monsieur Émile PICARD,

MEMBRE DE L'INSTITUT,
PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE PARIS.

A

MES ANCIENS PROFESSEURS

DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE.

A

MONSIEUR F. COSSERAT,

INGÉNIEUR EN CHEF DES PONTS ET CHAUSSÉES.

Hommage de profonde reconnaissance.

H. LACAZE.

PREMIÈRE THÈSE.

SUR

LA CONNEXION LINÉAIRE

DE QUELQUES SURFACES ALGÉBRIQUES.

INTRODUCTION.

Dans une Note parue aux *Comptes rendus* (4 septembre 1899), M. Arthur Berry annonçait qu'il avait déterminé toutes les surfaces du quatrième degré qui possèdent des intégrales de différentielles totales de première espèce, en employant la méthode donnée par M. Picard [1]. Cette méthode consiste à déterminer la surface $F(x, y, z) = 0$, de degré m, de façon que l'on puisse trouver quatre polynomes $\theta(x, y, z)$, d'ordre $m - 3$, satisfaisant, en premier lieu, aux conditions suivantes :

$$\theta_1 \frac{\partial F}{\partial x} + \theta_2 \frac{\partial F}{\partial y} + \theta_3 \frac{\partial F}{\partial z} + \theta_4 \frac{\partial F}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial x} + \frac{\partial \theta_2}{\partial y} + \frac{\partial \theta_3}{\partial z} + \frac{\partial \theta_4}{\partial t} = 0,$$

où t représente la variable d'homogénéité.

Au mois de janvier 1900, M. de Franchis [2] publiait un Mémoire sur les surfaces du quatrième degré dont le genre géométrique est nul, et il remarquait, à la fin de ce Mémoire, que M. Berry avait certainement omis de citer une surface du quatrième degré parmi celles qui admettent des intégrales de différentielles totales de première espèce.

J'ai voulu alors reprendre cette question à un autre point de vue et chercher l'ordre de connexion linéaire des surfaces du quatrième degré, c'est-à-dire le

---

(1) *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, t. I, Chap. V.

(2) M. de Franchis, *Le superficie irrazionali di 4° ordine di genere geometrico-superficiale nullo* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. XIV).

nombre des intégrales de différentielles totales de première et de seconde espèce attachées à ces surfaces.

Je commence par rappeler la notion de cycle linéaire d'une surface algébrique, ainsi que la méthode pour trouver le nombre de cycles linéaires distincts d'une telle surface, d'après les idées de M. Picard, telles qu'elles sont exposées dans le Tome I de sa *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes,* Chap. II et IV.

J'indique ensuite comment, étant donnée une surface de la forme

$$z^2 = f(x, y),$$

on peut établir certaines propositions permettant, dans un très grand nombre de cas, de déterminer très simplement l'ordre de connexion linéaire de cette surface. J'applique ces principes aux surfaces particulières pour lesquelles f est un polynome du sixième ou du huitième degré en x et y. Je remarque aussi que les surfaces du quatrième degré admettant des cycles finis, c'est-à-dire des cycles non équivalents à zéro, sont représentables sur un cône cubique, et je détermine ces surfaces par une voie différente de celle suivie par M. de Franchis.

CHAPITRE I.

I. — Cycles linéaires d'une surface algébrique. Généralités.

1. Soit une relation algébrique

$$F(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

entre trois variables complexes x, y, z, définissant z comme fonction de x et y; en employant le langage géométrique, nous dirons que cette relation définit une *surface algébrique* F.

A cette surface F on peut faire correspondre birationnellement une surface Φ n'ayant aucun point multiple et située dans un espace à cinq dimensions [1]. Si, par analogie avec la théorie des fonctions d'une variable complexe, on représente sur une sphère chaque coordonnée complexe de l'espace à cinq dimensions, la

[1] E. Picard, *Comptes rendus,* p. 532-538; 15 mars 1897. — *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes,* t. I, p. 82.

surface Φ définira une variété fermée à quatre dimensions réelles, située tout entière à distance finie et ne se coupant pas elle-même.

Revenant à la relation (1), nous pouvons, dans l'espace à quatre dimensions, qui est le champ des variables x et y, considérer une courbe fermée C telle que, en partant d'un point (x_0, y_0) de cette courbe avec une valeur initiale z_0, on revienne au point de départ avec la même valeur de z. La courbe C sera une *variété* ou *continuum* à une dimension réelle; nous supposerons que cette courbe ne passe par aucun point critique de la variable z regardée comme fonction de x et y. Une courbe telle que C est un *cycle linéaire* de la surface F.

A chaque cycle linéaire C de F correspondent des courbes fermées sur F et sur Φ. Deux cycles linéaires sont considérés comme *équivalents* si l'on peut passer de l'un à l'autre par une déformation continue. Un cycle sera dit *nul* (1) si l'on peut le déformer d'une manière continue, de façon que la courbe fermée correspondante tracée sur Φ se réduise à un point.

On démontre qu'un cycle infiniment petit autour d'un point simple de la surface F est un cycle nul.

2. A chacun des cycles distincts de F correspondra dans Φ, comme nous l'avons déjà dit, une courbe fermée et, par ces courbes fermées, on ne pourra pas faire passer un espace à deux dimensions dont elles limitent une partie, car, s'il en était ainsi, ces courbes fermées et, par suite, les cycles se ramèneraient à un nombre moindre, c'est-à-dire qu'ils ne seraient pas distincts. On aura ainsi un certain nombre de courbes fermées dans Φ et ne formant pas frontière sur Φ; mais, si on leur adjoint une courbe fermée quelconque γ, dans le domaine Φ, elles formeront avec γ frontière complète sur Φ.

Le nombre des cycles distincts de la surface F sera donc égal à $p_1 - 1$, p_1 étant le nombre qui exprime l'ordre de connexion linéaire de la variété Φ, et la question des cycles distincts d'une surface peut se ramener ainsi à une question de géométrie de situation.

Toutefois, il conviendra de se placer à un autre point de vue pour la recherche effective du nombre $p_1 - 1$ relatif à la surface F. Étant donné un cycle linéaire C tracé sur la surface F, déformons ce cycle d'une façon continue de manière que, dans ses positions successives, il satisfasse aux mêmes conditions que C; nous obtiendrons ainsi un cycle C_1. Si les axes ont une disposition quelconque, tous les cycles linéaires de la surface pourront être amenés (2), par une déformation continue de ce genre, à être contenus dans un continuum

$$y = \text{const.};$$

(1) E. Picard, *Théorie des fonctions algébriques*, t. I, p. 92.
(2) E. Picard, *Théorie des fonctions algébriques*, t. I, p. 86.

en d'autres termes, les cycles de la surface F seront des cycles pour la courbe

$$F(x, \bar{y}, z) = 0,$$

le symbole $\bar{y}$ indiquant que y doit être regardé comme un paramètre. Mais tous les cycles de la courbe précédente ne seront pas, en général, distincts si on les considère sur la surface F. Nous allons voir comment, en faisant varier $\bar{y}$, on pourra déjà s'assurer que plusieurs de ces cycles sont équivalents.

3. Soit la courbe

$$z^2 = x(x-1)(x-y),$$

où y désigne un paramètre, et soit une intégrale I n'ayant pas de points singuliers logarithmiques, attachée à cette courbe; par exemple,

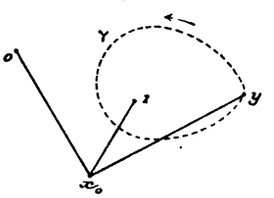
$$I = \int \frac{dx}{z}.$$

Pour une valeur donnée de y, on pourra définir ainsi les périodes ω_1, ω_2 de cette intégrale I. Marquons les points 0, 1, y et un autre point quelconque x_0. Nous désignerons par u_1, u_2, u_3 les valeurs de I correspondant respectivement aux lacets $(x_0, 0)$, $(x_0, 1)$, (x_0, y), la détermination initiale de z au point x_0 étant toujours supposée la même. Nous poserons

$$\omega_1 = u_1 - u_2,$$
$$\omega_2 = u_1 - u_3;$$

ω_1, ω_2 sont des fonctions de y qui ne changent pas si l'on fait décrire à y un contour fermé n'enveloppant aucun des points 0, 1. Soit alors un contour γ coupant le lacet $(x_0, 1)$ et supposons que y décrive γ dans le sens de la flèche (*fig.* 1).

Fig. 1.

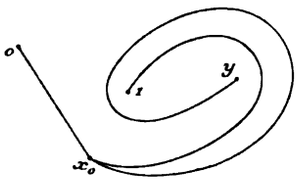


Lorsque le point y arrivera près du lacet $(x_0, 1)$, on déformera ce lacet de telle sorte que le point y ne le rencontre pas. On obtiendra ainsi, lorsque y sera revenu au point de départ, une figure dans laquelle les lacets $(x_0, 1)$, (x_0, y) (*fig.* 2) ne seront plus les lacets primitifs. Les quantités désignées plus haut par u_1, u_2, u_3

seront remplacées par les quantités

$$u_1, \quad u_2 + 2(u_3 - u_2), \quad u_3 + 2(u_3 - u_2),$$

Fig. 2.



ce qui revient à dire qu'au lieu des périodes ω_1, ω_2, nous aurons maintenant d'autres périodes Ω_1, Ω_2,

$$\Omega_1 = -\omega_1 + 2\omega_2,$$
$$\Omega_2 = -2\omega_1 + 3\omega_2,$$

qui sont des combinaisons linéaires, à coefficients entiers, des périodes primitives.

De même, soit la courbe déjà considérée

$$(1) \qquad F(x, \overline{y}, z) = 0$$

et considérons une intégrale de première ou de seconde espèce relative à cette courbe

$$(2) \qquad I = \int R(x, y, z)\, dx,$$

où $R(x, y, z)$ désigne une fonction rationnelle de x et z, et aussi du paramètre y.

La courbe (1) étant de genre p, l'intégrale I admettra, pour une valeur donnée de y, $2p$ périodes

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_{2p}.$$

Après une circulation de y, ces périodes ω se changeront en d'autres Ω qui seront des combinaisons linéaires, à coefficients entiers, des périodes primitives; nous aurons

$$(S) \qquad \Omega_i = m_1^i \omega_1 + m_2^i \omega_2 + \ldots + m_{2p}^i \omega_{2p} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2p).$$

Les équations (S) expriment un fait géométrique : elles indiquent, si C_1, C_2, ..., C_p désignent les cycles correspondant aux périodes ω_1, ω_2, ..., ω_p, que le cycle C_1, par exemple, par une déformation continue accompagnant la variation de y, a été transformé en une somme de m_1^1 fois le cycle C_1 plus m_2^1 fois le cycle C_2 plus, etc., plus m_2^1 fois le cycle C_{2p}.

4. Les substitutions (S) forment un groupe G. Une intégrale abélienne quel-

conque, de première ou de seconde espèce, attachée à la courbe (1) donnera lieu à ce même groupe G.

M. Fuchs [1] a montré que les périodes d'une intégrale abélienne, de première ou de seconde espèce, relative à une courbe telle que (1), satisfont à une équation linéaire (E) dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de y. Les diverses équations (E), qu'on peut ainsi former, correspondant aux diverses intégrales de première et de seconde espèce de la courbe (1), ont même groupe de substitutions, et ce groupe est le groupe G.

Soit

$$\text{(E)} \qquad \alpha_{2p}\frac{d^{2p}\omega}{dy^{2p}} + \alpha_{2p-1}\frac{d^{2p-1}\omega}{dy^{2p-1}} + \ldots + \alpha_0\omega = 0$$

l'équation que vérifient les périodes de l'intégrale (2) déjà considérée. Si l'on veut obtenir cette équation, on considérera l'intégrale J suivante,

$$J = \alpha_{2p}\frac{d^{2p}I}{dy^{2p}} + \alpha_{2p-1}\frac{d^{2p-1}I}{dy^{2p-1}} + \ldots + \alpha_0 I,$$

et l'on remarquera que les périodes de cette intégrale sont toutes nulles, en vertu de l'équation E. Par conséquent, J sera une fonction rationnelle de x et de z, et, par suite, de y. Posons alors

$$u_1 = \int \varphi_1\,dx, \qquad u_2 = \int \varphi_2\,dx, \qquad \ldots, \qquad u_p = \int \varphi_p\,dx,$$
$$v_1 = \int \psi_1\,dx, \qquad v_2 = \int \psi_2\,dx, \qquad \ldots, \qquad v_p = \int \psi_p\,dx,$$

les intégrales u étant les intégrales de première espèce de la courbe (1), et les intégrales v désignant p intégrales de seconde espèce formant avec les intégrales u un système fondamental.

Pour exprimer que l'intégrale J se réduit à une fonction de x et z, on écrira, d'après un théorème dû à Weierstrass :

1° Que la somme des résidus du produit $J\varphi_i(x, \bar{y}, z)$ est nulle;
2° Que la somme des résidus du produit $J\psi_i(x, \bar{y}, z)$ est nulle

$$(i = 1, 2, \ldots, 2p).$$

On obtiendra ainsi $2p$ relations linéaires et homogènes entre les $2p+1$ coefficients α.

---

(1) Fuchs, *Journal de Crelle*, t. 71 et 73.

5. Soit une variété V_n, à n dimensions, située dans l'espace général à m dimensions ($m \geqq n$), où l'on désigne les coordonnées d'un point par $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$.

Dans l'espace général à m dimensions, on peut considérer une intégrale simple

$$(3) \qquad \int \sum_{i=1}^{i=n} X_i \, dx_i,$$

où les X sont des fonctions des quantités réelles $x_1, x_2, \ldots, x_m$ restant uniformes et continues quand le point $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ se déplace dans V_n; on suppose que les conditions d'intégrabilité sont remplies quand on regarde $x_{n+1}, \ldots, x_m$ comme fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. On a ainsi une intégrale de différentielle totale dans V_n.

L'intégrale (3) étant une intégrale arbitrairement choisie sous les conditions indiquées, l'ordre de connexion linéaire de V_n est égal au nombre, augmenté d'une unité, des périodes distinctes de cette intégrale.

Cela étant, envisageons le continuum à quatre dimensions réelles représenté par l'équation

$$F(x, y, z) = 0.$$

Sur cette variété, à chaque valeur de y correspondent, comme il a été dit, $2p$ cycles $C_1, C_2, \ldots, C_{2p}$, et chacun d'eux, par une circulation convenable de y, se ramène à une somme de multiples des différents cycles $C_1, C_2, \ldots, C_{2p}$. L'ensemble de ces cycles et du transformé de l'un d'eux forme donc frontière complète. Par suite, si l'on considère une intégrale de différentielle totale de la nature de l'intégrale (3), et si l'on désigne par

$$P_1, \quad P_2, \quad \ldots, \quad P_{2p}$$

ses périodes relativement aux cycles $C_1, C_2, \ldots, C_{2p}$, la période correspondant au cycle transformé de C_1 sera encore P_1, et de même pour les autres. On aura donc

$$(\pi) \qquad P_i = m_1^i P_1 + m_2^i P_2 + \ldots + m_{2p}^i P_{2p} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2p),$$

et à chaque substitution du groupe G correspondront $2p$ équations de cette forme.

Les équations (π) correspondant à toutes les substitutions du groupe G n'admettront, en général, que la solution

$$P_1 = 0, \qquad P_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad P_{2p} = 0,$$

c'est-à-dire que tous les cycles de la surface se réduiront à zéro.

S'il arrive qu'on puisse satisfaire à toutes les équations (π) autrement qu'en

annulant toutes les quantités P, supposons alors que, de l'ensemble des équations (π), on puisse tirer $2p - r$ des quantités P en fonction des r autres restant arbitraires, il est clair que le nombre des cycles distincts de la surface sera au plus égal à r.

On a ainsi effectué une première réduction des cycles linéaires de la surface F. Cette réduction sera suffisante dans les cas particuliers de surfaces que nous allons bientôt considérer. Nous indiquerons néanmoins comment on pourra, dans le cas général, achever de déterminer le nombre des cycles distincts d'une surface.

6. Les considérations précédentes, basées sur l'étude d'une intégrale abélienne dont les périodes sont fonctions de y, ne permettent pas d'affirmer que le nombre r soit égal à $p_1 - 1$, parce qu'on n'a envisagé que des déformations particulières de cycles correspondant à la déformation de la surface de Riemann,

$$F(x, \bar{y}, z) = 0.$$

Le nombre r doit donc être envisagé seulement comme un maximum du nombre $p_1 - 1$ des cycles linéaires distincts de la surface.

Soient alors $2p$ intégrales abéliennes distinctes n'ayant pas de points critiques logarithmiques, relatives à la courbe $F(x, \bar{y}, z) = 0$. Désignons-les par

$$I_i = \int \varphi_i(x, y, z)\, dx \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2p).$$

Les périodes de ces intégrales ont le même groupe de substitutions.

On peut chercher à déterminer des fonctions rationnelles de y,

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_{2p},$$

de telle sorte que les périodes de l'intégrale

$$a_1 I_1 + a_2 I_2 + \ldots + a_{2p} I_{2p}$$

ne dépendent pas de y. Soient

$$\omega_1^h, \quad \omega_2^h, \quad \ldots, \quad \omega_{2p}^h$$

les $2p$ périodes de I_h. Nous aurons à écrire les $2p$ équations

$$a_1 \omega_k^1 + a_2 \omega_k^2 + \ldots + a_{2p} \omega_k^{2p} = P_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, 2p),$$

les P étant des constantes. En particulier, si ces constantes satisfont à l'ensemble des équations (π), les équations précédentes détermineront pour les a des fonc-

tions rationnelles de y. En effet, en vertu des équations (π), quand y a décrit un chemin fermé quelconque, le système d'équations en a est identique au précédent.

Si nous posons

$$R_1 = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \ldots + a_{2p}\varphi_{2p},$$

R_1 sera une fonction rationnelle en x, y, z, et les périodes de l'intégrale

$$\int R_1\, dx$$

ne dépendront pas de y. Il s'ensuit que l'expression

$$\int_{(x_0, z_1)}^{(x,z)} \frac{\partial R_1}{\partial y}\, dx = \frac{\partial}{\partial y}\int_{(x_0, z_1)}^{(x,z)} R_1\, dx$$

sera une fonction rationnelle de x, y, z et de z_1, z_1 étant une racine de l'équation en z,

$$F(x_0, y, z) = 0,$$

et, par conséquent, si l'on pose

$$S_1 = \frac{1}{m}\left[\int_{(x_0, z_1)}^{(x,z)} \frac{\partial R_1}{\partial y}\, dx + \int_{(x_0, z_2)}^{(x,z)} \frac{\partial R_1}{\partial y}\, dx + \ldots + \int_{(x_0, z_m)}^{(x,z)} \frac{\partial R_1}{\partial y}\, dx\right],$$

$z_1, z_2, \ldots, z_m$ étant les m racines de $F(x_0, y, z) = 0$, S_1 sera une fonction rationnelle de x, y, z et l'intégrale J_1,

$$J_1 = \int R_1\, dx + S_1\, dy,$$

sera une intégrale de différentielle totale pour la surface F.

Pour déterminer pratiquement les fonctions a de y et, par suite, $R_1(x, y, z)$, on pourra appliquer le théorème de Weierstrass déjà cité à l'intégrale S_1. On obtiendra ainsi $2p$ équations linéaires et homogènes entre $a_1, a_2, \ldots, a_{2p}, \frac{da_1}{dy}, \frac{da_2}{dy}, \ldots, \frac{da_{2p}}{dy}$, les coefficients de ces équations étant des polynomes en y; on en tirera $a_2, \ldots, a_{2p}$ en fonction de a_1 et de ses dérivées, et a_1 satisfera à une équation linéaire ($\mathcal{E}$) d'ordre au plus égal à $2p$ dont les coefficients seront des polynomes en y.

7. L'intégrale J_1 qui vient d'être obtenue admet r périodes arbitraires données à l'avance sur la surface F. Si F est une surface n'ayant que des singularités ordi-

naires, c'est-à-dire une courbe double avec des points triples, ces singularités étant les plus générales de leur nature, M. Picard a alors démontré que, parmi les r périodes arbitraires de J_1, il n'y en a aucune provenant d'une courbe logarithmique.

Il s'ensuit que, dans ce cas, le nombre r représentera le nombre des cycles linéaires distincts. On aura

$$p_1 - 1 = r.$$

De plus, en supposant toujours que F n'admet que des singularités ordinaires, l'intégrale J_1 est une intégrale de différentielle totale de première ou de seconde espèce, et l'on est encore conduit à ce théorème, que le nombre des cycles distincts d'une surface est égal au nombre des intégrales de différentielles totales de première et de seconde espèce attachées à la surface.

Si la surface F est quelconque, il pourra arriver que les r périodes arbitraires de l'intégrale J_1 ne soient pas toutes des périodes cycliques, certaines d'entre elles provenant de singularités logarithmiques. On aura alors

$$p_1 - 1 < r.$$

Si l'on veut trouver le nombre des cycles distincts de la surface, on pourra la transformer birationnellement en une surface F_1 n'ayant que des singularités ordinaires, et le nombre $r_1 + 1$ relatif à cette surface F_1 exprimera l'ordre de connexion linéaire de F.

8. Il existe des surfaces pour lesquelles il est possible de trouver immédiatement le nombre $p_1 - 1$, en formant directement les intégrales de différentielles totales de première et de seconde espèce attachées à la surface. Nous donnerons deux exemples simples :

Soit la surface

$$z = \sqrt{\varphi(x)} + \sqrt{\psi(y)},$$

φ étant un polynome en x et ψ un polynome en y. Nous pourrons prendre, pour les coordonnées d'un point de cette surface, les expressions

$$x = \alpha,$$
$$y = \alpha',$$
$$z = \beta + \beta',$$

β et β' satisfaisant de plus aux relations

$$\beta^2 = \varphi(\alpha), \tag{4}$$
$$\beta'^2 = \psi(\alpha'). \tag{5}$$

Inversement, on aura

$$\alpha = x,$$
$$\alpha' = y,$$
$$2\beta = z + \frac{\varphi(x) - \psi(y)}{z},$$
$$2\beta' = z - \frac{\varphi(x) - \psi(y)}{z};$$

et, par conséquent, il y a correspondance univoque entre un point de la surface considérée et un système de deux points pris, l'un sur la courbe (4), l'autre sur la courbe (5). Si p et p' désignent les genres respectifs de ces deux courbes, on voit qu'on pourra former $p + p'$ intégrales de différentielles totales de première espèce, et $p + p'$ intégrales de différentielles totales de seconde espèce, de telle sorte que toute autre intégrale de première ou de seconde espèce attachée à la surface soit une combinaison linéaire de celles-là. On pourra donc écrire

$$p_1 - 1 = 2p + 2p'.$$

Soit encore la surface dont les coordonnées ont pour expression

$$x = \alpha\alpha', \qquad y = \frac{\alpha + \alpha'}{2}, \qquad z = \beta + \beta',$$

β et β' étant donnés par les équations

$$\beta^2 = \alpha(1 - \alpha)(1 - k^2\alpha) = \varphi(\alpha),$$
$$\beta'^2 = \alpha'(1 - \alpha')(1 - k^2\alpha') = \varphi(\alpha'),$$

α, α' seront racines de l'équation en u,

$$u^2 - 2yu + x = 0;$$

d'où il viendra

$$\alpha = y + \sqrt{y^2 - x},$$
$$\alpha' = y - \sqrt{y^2 - x},$$
$$2\beta = z + \frac{\varphi(\alpha) - \varphi(\alpha')}{z},$$
$$2\beta' = z + \frac{\varphi(\alpha') - \varphi(\alpha)}{z};$$

il existera une correspondance univoque, cette fois, entre un point de la surface donnée et un système de deux points pris sur une seule courbe. Considérons, relativement à cette courbe, l'intégrale suivante, qui reste toujours finie,

$$(6) \qquad K_1 = \int \frac{d\alpha}{\beta} + \int \frac{d\alpha'}{\beta'}.$$

Si, dans cette intégrale, on remplace α, α', β, β' par leurs expressions en fonction de x, y, z, il viendra

$$K_1 = \int P\,dx + Q\,dy,$$

P et Q étant rationnels en x, y, z.

Réciproquement, toute intégrale de différentielle totale de première espèce appartenant à la surface sera de la forme (6), après qu'on y aura remplacé x, y, z par leurs expressions en fonction de α, α', β, β'.

De la même manière, on pourra former une intégrale de seconde espèce K_2, telle que toute intégrale de première ou de seconde espèce attachée à la surface s'exprime linéairement en fonction de K_1 et de K_2. L'ordre de connexion linéaire de la surface sera donc égal à trois.

II. — Sur la réduction des cycles linéaires des surfaces $z^2 = f(x, y)$.

1. Les surfaces que nous allons considérer seront de la forme

$$z^2 = f(x, y), \tag{1}$$

$f(x, y)$ désignant un polynome en x, y. Ce cas est le plus simple : tous les cycles de la surface pouvant être amenés dans un continuum $y =$ const. correspondront alors à des contours tracés dans ce continuum et enveloppant deux racines seulement de l'équation en x

$$f(x, y) = 0,$$

où y a la valeur constante considérée.

Nous allons présenter quelques remarques simples permettant, dans bien des cas, sinon toujours, de résoudre le problème de la connexion linéaire pour une surface de la forme (1).

2. M. Picard a démontré que si $f(x, y)$ est le polynome en x, y, le plus général de son degré, l'ordre de connexion linéaire de la surface (1) correspondante est égal à un. Tous les cycles linéaires de la surface se réduisent à des cycles nuls.

On sera conduit à la même conclusion dans bien d'autres cas. Faisons voir, tout d'abord, que si f est un polynome irréductible en x, y, la surface (1) n'aura pas de cycles *finis*.

On peut toujours supposer qu'il existe, au moins, une valeur de y, soit $y = b$, pour laquelle l'équation

$$f(x, b) = 0$$

aura une racine double a, cette racine étant double seulement. Cela étant, don-

nons à y une valeur arbitraire y_0, l'équation $f(x, y_0) = 0$ aura m racines

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_m$$

et, en général, la demi-somme de deux de ces racines ne sera pas égale à la demi-somme de deux quelconques des $m - 2$ autres racines.

Prenons alors un couple de ces racines, le couple (x_α, x_β), par exemple. Nous allons pouvoir faire décrire à y un chemin tel que, y allant de y_0 à b par ce chemin, les deux racines x_α, x_β deviennent, pour $y = b$, égales à a.

Pour s'en assurer, il suffira de prendre l'équation aux demi-sommes u des racines de l'équation en x

$$f(x, y) = 0;$$

ce sera une certaine équation

$$F(u, y) = 0.$$

La courbe entre u et y, $F(u, y) = 0$, sera, en général, une courbe irréductible comme f; car on peut supposer que la courbe f occupe une position quelconque par rapport aux axes, et alors F est une courbe diamétrale de f correspondant à une direction arbitraire.

Soit, pour $y = y_0$, la racine simple

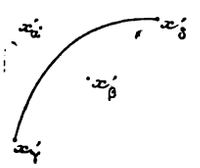
$$u_0 = \frac{x_\alpha + x_\beta}{2}.$$

Pour $y = b$, l'équation $F = 0$ aura certaines racines doubles; mais la racine qui nous intéresse, $u = a$, sera, en général, une racine simple.

On sait alors qu'il est possible de trouver un chemin l, allant de y_0 en b, conduisant de la racine u_0 à la racine a; ce chemin permettra alors de passer du couple (x_α, x_β) au couple (a, a), comme nous voulions le montrer.

Cela étant, si y, partant de y_0 et suivant le chemin l, s'arrête en un point b'

Fig. 3.



très voisin du point b, les racines x_α, x_β deviendront deux racines x'_α, x'_β de

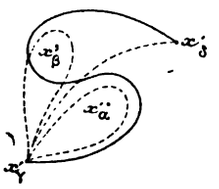
$$f(x, b') = 0$$

et ces deux racines différeront infiniment peu de a. Décrivons un contour infiniment petit C′ autour de x'_α, x'_β. Il est facile de voir que C′ sera un cycle nul

relativement à la surface considérée. S'il existe, en effet, une intégrale de différentielle totale de première ou de seconde espèce attachée à cette surface, nous considérerons un chemin d'intégration (*fig.* 3) passant entre x'_α, x'_β et joignant deux autres racines quelconques x'_γ, x'_δ de $f(x, b') = 0$.

Ce dernier correspondra à la moitié d'une période de l'intégrale considérée. Si nous faisons décrire à y, à partir du point b', une petite courbe fermée entourant le point b, et si nous déformons en même temps le chemin d'intégration indiqué, de manière qu'il ne rencontre aucun point critique, nous obtiendrons, lorsque y

Fig. 4.



sera revenu en b', la disposition marquée par la *fig.* 4, où l'on voit qu'il y a eu permutation entre x'_α et x'_β.

Le chemin primitif (x'_γ, x'_δ) s'est ainsi transformé en ce même chemin, augmenté d'un cycle infiniment petit entourant x'_α et x'_β, et que nous pouvons supposer coïncider avec C'. Comme les périodes d'une intégrale de différentielle totale de première ou de seconde espèce ne doivent pas dépendre de y, il s'ensuit bien que le cycle C' sera équivalent à zéro.

Faisons maintenant revenir y de la valeur b' à la valeur y_0 par le chemin l; le cycle C' deviendra, après cette variation, un certain cycle C entourant x_α, x_β, et le cycle C sera nul.

Nous voyons, ainsi, qu'on pourra, dans le continuum $y = y_0$, tracer un cycle C_1 entourant x_1 et x_2, puis un cycle C_2 entourant x_2 et x_3, etc.; enfin, un dernier cycle C_{m-1} entourant x_{m-1} et x_m, tous ces cycles étant équivalents à zéro. D'ailleurs, un cycle quelconque décrit dans le continuum $y = y_0$ se ramènera à une somme de multiples des cycles $C_1, C_2, \ldots, C_{m-1}$, et l'on voit bien alors que tous les cycles de la surface se réduiront à zéro.

3. La démonstration précédente n'est pas indépendante de toute hypothèse sur f; elle suppose, par exemple, qu'une certaine équation $F(u, y) = 0$ est irréductible. Nous allons donc reprendre la question pour la traiter d'une façon tout à fait générale.

A cet effet, soit, d'abord, une surface ayant pour équation

$$z^2 = \sigma_1 \sigma_2,$$

une expression telle que σ_α devant désigner désormais un polynome irréductible en x, y de degré α. Pour une valeur donnée y_0 de y, l'équation en x, $\sigma_1 = 0$, admettra une racine a_1; l'équation $\sigma_5 = 0$ donnera cinq autres racines

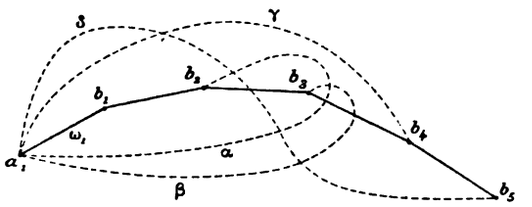
$$b_1, \quad b_2, \quad \ldots, \quad b_5.$$

Joignons par un trait continu les points $a_1, b_1, b_2, \ldots, b_5$ (*fig.* 5). Nous représenterons par la notation

$$(b_2, b_3),$$

par exemple, le cycle entourant les racines b_2, b_3 et qui correspond au double de la valeur d'une intégrale de différentielle totale quelconque de première ou de

Fig. 5.



seconde espèce attachée à la surface, prise de b_2 à b_3, suivant le chemin marqué par le trait continu b_2, b_3, ce dernier étant supposé parcouru sur l'un des deux feuillets de la surface de Riemann $z^2 = f(x, \bar{y})$. Nous poserons encore

$$\omega_1 = (a_1, b_1).$$

Un cycle quelconque de la surface se réduira à une combinaison linéaire à coefcients entiers des cycles fondamentaux

$$\omega_1, \quad (b_1, b_2), \quad (b_2, b_3), \quad (b_3, b_4), \quad (b_4, b_5).$$

Cela étant, nous savons qu'on peut faire parcourir successivement à y plusieurs chemins partant de y_0 et y revenant, de telle sorte que le premier de ces chemins échange les racines b_1 et b_2, le second les racines b_2, et b_3 et ainsi de suite jusqu'au dernier qui échangera b_4 et b_5.

Pendant cette variation de y, le cycle ω_1 se transformera en un certain cycle α entourant les racines a_1 et b_2; puis ce cycle α se transformera en un autre β correspondant aux racines a_1 et b_3; on ira ainsi jusqu'à un cycle δ formé avec les racines a_1 et b_5.

Écrivons que la valeur d'une intégrale quelconque de différentielle totale de première ou de seconde espèce attachée à la surface ne change pas quand on passe

du cycle ω_1 au cycle α. Il viendra une relation de la forme

$$\omega_1 = h\omega_1 + k(b_1, b_2) + 2U,$$

où h et k sont des entiers impairs, U désignant une somme de multiples des cycles fondamentaux autres que ω_1 et (b_1, b_2). De même, l'intégrale considérée conservera la même valeur quand on passera du cycle α au cycle β, etc., et, enfin, du cycle γ au cycle δ. Finalement, nous aurons quatre équations de la forme

$$(2) \qquad \begin{cases} (b_1, b_2) + 2U_1 = 0, \\ (b_2, b_3) + 2U_2 = 0, \\ (b_3, b_4) + 2U_3 = 0, \\ (b_4, b_5) + 2U_4 = 0, \end{cases}$$

où les expressions $U_1, U_2, \ldots, U_4$ désignent des sommes de multiples des cycles fondamentaux. Des équations précédentes on déduit qu'il existera, entre un cycle fondamental quelconque et le cycle ω_1, une relation linéaire et homogène à coefficients entiers. On aura, par exemple,

$$m(b_1, b_2) + n\omega_1 = 0,$$

m et n étant des entiers. Il s'ensuit que la surface considérée admettra, au plus, un cycle fini.

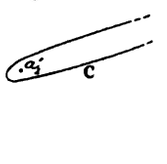
Supposons alors que la droite

$$\sigma_1 = 0$$

passe à l'origine, qui est aussi un point simple pour la courbe $\sigma_5 = 0$, la tangente en ce point à σ_5 et la droite σ_1 étant d'ailleurs différentes et aucune d'elles ne coïncidant avec l'un des axes.

Pour y voisin de zéro, nous aurons à considérer deux racines x infiniment petites : l'une, a'_1, provenant de $\sigma_1 = 0$; l'autre, b'_1, donnée par $\sigma_5 = 0$. Soit un cycle C (*fig.* 6), entourant une des deux racines infiniment petites, a'_1, par exemple, et une racine de l'équation $\sigma_5 = 0$ différente de b'_1.

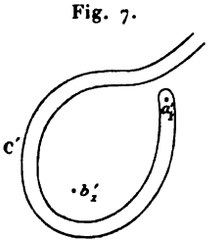
Fig. 6.



Si nous faisons décrire à y, dans son plan, une courbe fermée très petite enfermant l'origine, chacun des points a'_1, b'_1 décrira également dans le plan des x un contour très petit comprenant l'origine à son intérieur. Si, en même temps, on

suit la déformation du cycle C, on voit que, y étant revenu au point de départ, ce cycle se sera transformé (*fig.* 7) en un autre C′, qui est équivalent au cycle

Fig. 7.



primitif C, augmenté de deux fois un cycle C_1 entourant le point a'_1, b'_1. D'après la remarque, déjà faite plusieurs fois, que les périodes d'une intégrale de différentielle totale de première ou de seconde espèce ne dépendent pas de y, le cycle C_1 sera un cycle nul sur la surface considérée.

Nous sommes ainsi assurés que, dans le continuum $y = y_0$, nous pourrons tracer un cycle autour de la racine a_1 et d'une racine de $\sigma_5 = 0$, que nous pouvons supposer être b_1, ce cycle étant équivalent à zéro. Aux équations (2) vient alors s'en ajouter une nouvelle de la forme

$$\omega_1 + 2U_5 = 0, \tag{3}$$

U_5 désignant toujours une somme de multiples des cycles fondamentaux. Les équations (2) et (3) ne peuvent être satisfaites que par la solution

$$\omega_1 = (a_1, b_2) = (a_1, b_3) = \ldots = (a_1, b_5) = 0,$$

et, par conséquent, tous les cycles de notre surface se réduiront à zéro.

Il en sera évidemment de même si l'on considère une surface ayant pour équation

$$z^2 = \sigma_1 \sigma_{2n-1}, \tag{4}$$

en supposant, toutefois, que la droite $\sigma_1 = 0$ rencontre la courbe $\sigma_{2n-1} = 0$ en un point simple, la tangente en ce point à σ_{2n-1} n'étant pas la droite σ_1. On peut, d'ailleurs, admettre que cette condition est toujours vérifiée. En effet, on pourra d'abord ramener la surface (4) à la forme

$$z^2 = x\,\varphi(x, y),$$

φ étant irréductible et de degré impair. Posons alors

$$x = \frac{1}{X}, \qquad y = \frac{Y}{X}, \qquad z = \frac{Z}{X^n},$$

il viendra une surface

$$Z^2 = \psi(X, Y),$$

ψ étant irréductible. Transportons l'origine en un point simple de la courbe $\psi = 0$ et soit alors

$$\psi(X, Y) = aX + bY + \ldots \qquad (ab \neq 0),$$

aucune asymptote de la courbe n'étant parallèle aux axes. La transformation

$$X = \xi, \qquad Y = \xi\eta$$

nous conduira à la surface

$$Z^2 = \xi[a + b\eta + \xi(\ldots)],$$

la droite $\xi = 0$ coupant la courbe transformée de ψ en un point simple

$$\xi = 0, \qquad \eta = -\frac{a}{b},$$

la tangente en ce point à cette courbe et la droite $\xi = 0$ étant différentes.

Il n'y a plus, maintenant, aucune difficulté à voir que pour une surface

$$z^2 = f(x, y),$$

f étant irréductible, l'ordre de connexion linéaire est égal à un, puisque cette surface, par l'une des transformations précédentes, pourra être mise sous la forme

$$z^2 = \sigma_1 \sigma_{2n-1}.$$

4. Soient les deux courbes

$$\sigma_m = 0, \qquad \sigma_n = 0,$$

l'une de degré m et l'autre de degré n, m et n étant supérieurs à un. Supposons que ces deux courbes se coupent en un point R qui est simple sur chacune d'elles, les tangentes en ce point aux deux courbes étant distinctes. La surface

$$(5) \qquad z^2 = \sigma_m \sigma_n$$

n'admettra, dans ce cas, aucun cycle linéaire fini. Plaçons, en effet, l'origine en un point simple de σ_m et menons les axes de telle sorte que le point R soit en dehors d'eux et que l'on ait

$$\sigma_m = ax + by + \ldots \qquad (ab \neq 0),$$

aucune asymptote de σ_m et de σ_n n'étant d'ailleurs parallèle à Ox ou à Oy.

La transformation

$$x = X, \qquad y = XY$$

nous donnera alors une surface

$$z^2 = \sigma_1 \sigma_{2m-1} \sigma_{2n}; \tag{6}$$

la courbe

$$\sigma_{2m-1} = 0$$

coupera la droite $\sigma_1 = 0$ en un point P_1 et la courbe $\sigma_{2n} = 0$ en un point R_1, transformé du point R. Les points P_1 et R_1 sont simples sur les courbes qui y passent et les tangentes en ces points sont, de plus, distinctes.

En raisonnant exactement comme au numéro précédent, on verra que tous les cycles de la surface (6) et, par conséquent aussi, ceux de la surface (5) se réduisent à zéro.

On arrivera à la même conclusion si l'on suppose que les courbes σ_m et σ_n, au lieu de se couper au point R, de coordonnées (a, b), sont tangentes en ce point.

Pour $y = b$, une racine de $\sigma_m = 0$ et une racine de $\sigma_n = 0$ deviendront égales à a. Les développements de ces racines, aux environs du point R, seront de la forme

$$x = a + c_1(y-b) + \ldots + c_\alpha(y-b)^\alpha + c_\beta(y-b)^\beta + \ldots,$$
$$x = a + c_1(y-b) + \ldots + c_\alpha(y-b)^\alpha + c'_\beta(y-b)^\beta + \ldots,$$

les coefficients des puissances de $y - b$ inférieures à la puissance β étant respectivement égaux dans les deux développements; c_β et c'_β sont différents, et l'on peut supposer qu'aucun de ces deux coefficients n'est nul.

Posons

$$x - a - c_1(y-b) - \ldots - c_\alpha(y-b)^\alpha = (X-a)(Y-b)^{\beta-1},$$
$$y = Y.$$

Les courbes σ_m, σ_n se transforment en d'autres courbes σ'_m, σ'_n, qui passeront au point (a, b), avec des tangentes distinctes. Les développements des racines correspondantes, devenant égales à a, pour $y = b$, seront

$$\begin{aligned} X &= a + c_\beta(Y-b) + \ldots, \\ X &= a + c'_\beta(Y-b) + \ldots \end{aligned} \qquad (c_\beta \neq c'_\beta),$$

et l'on sera ainsi ramené au cas précédemment étudié, de deux courbes se coupant en un point simple R et n'admettant pas la même tangente en ce point.

5. Étant données les deux courbes

$$\sigma_m = 0, \qquad \sigma_n = 0$$

qui se coupent en un point simple sur chacune d'elles, nous venons de voir que la surface

$$z^2 = \sigma_m \sigma_n \tag{5}$$

ne possède aucun cycle fini. Nous pouvons signaler quelques autres cas très simples où il en sera encore ainsi.

Supposons que les courbes σ_m et σ_n, ayant toutes les deux à l'origine un point multiple d'ordre pair, ou toutes les deux un point multiple d'ordre impair, admettent en ce point une tangente commune simple pour chacune d'elles, que nous prendrons pour axe des y. L'équation (5) pourra, dès lors, s'écrire

$$z^2 = [x\varphi_m(x,y) + \varphi_{m+2}(x,y) + \ldots][x\psi_n(x,y) + \psi_{n+2}(x,y) + \ldots],$$

et, si l'on fait la transformation,

$$x = XY, \qquad y = Y, \qquad z = ZY^{\frac{m+n}{2}},$$

il viendra la surface

$$z^2 = \sigma'_m, \sigma'_n,$$

l'origine étant maintenant un point simple pour les courbes

$$\sigma'_m = 0, \qquad \sigma'_n = 0$$

transformées des courbes σ_m et σ_n.

Soit encore le cas où σ_m admet un point multiple d'ordre impair à l'origine, ce point étant pour la courbe σ_n un point d'ordre de multiplicité quelconque. Nous supposerons, de plus, que, parmi les tangentes de σ_n à l'origine, il y en a au moins une qui est simple et qui ne coïncide pas avec les tangentes à σ_m en ce point.

Par exemple, l'origine sera pour σ_m un point triple, et pour σ_n un point multiple d'ordre quatre. Pour y voisin de zéro, trois racines de σ_m

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3$$

et quatre racines de σ_n

$$b_1, \quad b_2, \quad b_3, \quad b_4$$

seront infiniment petites. Désignons par b_1 la racine de σ_n qui correspond à la tangente simple, à l'origine, de cette courbe, tangente distincte des tangentes à σ_m au même point, et dont nous avons supposé l'existence.

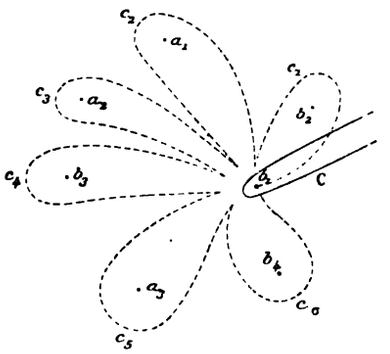
Considérons alors, dans le continuum $y = \text{const.}$, un cycle entourant la racine b_1 et une racine quelconque de σ_m ou de σ_n, qui ne soit pas infiniment petite. Ce cycle C se déformera, si nous faisons décrire à y une petite courbe fermée autour de l'origine, et, lorsque y sera revenu au point de départ, le cycle C se sera transformé en un cycle C′, qui est équivalent au cycle primitif C, augmenté

de deux fois la somme de certains cycles $c_1, c_2, \ldots, c_6$ (*fig.* 8). Nous pouvons donc écrire

$$c_1 + c_2 + \ldots + c_6 = 0.$$

Dans le continuum $y =$ const. considéré, on peut tracer $m + n - 1$ cycles fondamentaux, et l'on peut prendre, pour l'un de ces cycles, le cycle c_2. Si nous

Fig. 8.



posons $c_2 = \omega_1$, le nombre des racines infiniment petites a étant impair, il s'ensuit que la relation précédente prendra la forme

$$\omega_1 + 2\,U = 0,$$

U désignant une somme de multiples des cycles fondamentaux. Cela est suffisant, après ce qui a été dit jusqu'ici, pour pouvoir conclure que tous les cycles de la surface se réduisent à des cycles nuls.

Nous pouvons remarquer, enfin, que le cas où les courbes

$$\sigma_m = 0, \qquad \sigma_n = 0$$

sont l'une et l'autre de degré impair se ramène aisément au précédent.

Il suffit de supposer, ce qui est évidemment possible au moyen d'une transformation homographique, que la courbe σ_n rencontre la droite de l'infini en un point simple α, n'appartenant pas à σ_m, la tangente en ce point à σ_n étant distincte de la droite de l'infini.

L'origine étant quelconque et les axes ayant une direction aussi quelconque, on fera la transformation

$$x = \frac{1}{X}, \qquad y = \frac{1}{Y},$$

et l'on obtiendra ainsi une surface

$$z^2 = \sigma_{2m}\,\sigma_{2n},$$

l'origine étant pour les courbes σ_{2m} et σ_{2n} respectivement un point d'ordre de multiplicité m et n. D'ailleurs, la tangente à l'origine à σ_{2n}, qui correspond au point α, sera simple et distincte des tangentes au même point à la courbe σ_{2m}.

On sera donc toujours assuré de la réductibilité à zéro de tous les cycles d'une surface

$$z^2 = \sigma_m \sigma_n,$$

m et n étant impairs, quand bien même on ne saurait rien sur la nature des intersections des courbes σ_m et σ_n.

Observons encore que deux courbes

$$\sigma_m = 0, \qquad \sigma_n = 0,$$

les nombres m et n n'étant pas tous les deux impairs, peuvent être transformées birationnellement en deux courbes de degré pair σ_{2m}, σ_{2n} d'une infinité de manières. Si ces dernières courbes se rencontrent en un point O qui est pour l'une et pour l'autre un point d'un ordre de multiplicité impair, on fera une inversion

$$x = \frac{1}{X}, \qquad y = \frac{1}{Y},$$

après avoir transporté l'origine en ce point O, et l'on sera ainsi conduit à deux courbes σ'_m, σ'_n, toutes deux de degré impair, et, par conséquent, la surface

$$z^2 = \sigma_m \sigma_n$$

n'aura, dans ce cas, aucun cycle fini.

6. Passons maintenant à la considération d'une surface générale

$$z^2 = \sigma_m \sigma_n \sigma_r \sigma_s \ldots. \tag{7}$$

Si les deux courbes $\sigma_m = 0$, $\sigma_n = 0$ se coupent en un point simple sur chacune d'elles, ou si elles présentent en un de leurs points communs une des particularités dont nous avons parlé, le nombre des cycles distincts de la surface (7) sera réduit d'une unité. Si p est le nombre des polynomes irréductibles du second membre de (7), le nombre des cycles distincts non nuls de la surface sera, au plus, égal à $p - 2$. On peut dire qu'il existe une liaison, un passage du polynome σ_m au polynome σ_n, de telle manière qu'au point de vue qui nous occupe, l'ensemble $\sigma_m \sigma_n$ peut être considéré comme un seul polynome irréductible.

S'il existe de même une liaison de cette nature entre σ_n et σ_r ou, ce qui revient au même, entre σ_m et σ_r, etc., et ainsi de suite jusqu'au dernier des polynomes du second membre de (7), on peut être assuré que la surface (7) n'admet pas de cycles finis.

En d'autres termes, pour $y = y_0$, considérons les racines des polynomes

$$\sigma_m = 0, \qquad \sigma_n = 0, \qquad \sigma_r = , \qquad \ldots,$$

tous les cycles de la surface (7) seront des cycles nuls, si l'on peut former un cycle équivalent à zéro avec une racine de σ_m et une racine de σ_n, ... et ainsi de suite.

Soit, comme application, la surface du quatrième degré à seize nœuds, ou surface de Kummer.

Cayley a mis l'équation de cette surface sous la forme [1]

$$\sqrt{\alpha x_1\left(\gamma'\gamma'' x_2 - \beta'\beta'' x_3 - \frac{x_4}{\alpha}\right)} + \sqrt{\beta x_2\left(\alpha'\alpha'' x_3 - \gamma'\gamma'' x_1 - \frac{x_4}{\beta}\right)}$$
$$+ \sqrt{\gamma x_3\left(\beta'\beta'' x_1 - \alpha'\alpha'' x_2 - \frac{x_4}{\gamma}\right)} = 0,$$

les constantes $\alpha, \alpha', \ldots, \gamma', \gamma''$ étant liées par les relations

$$\alpha + \beta + \gamma = 0, \qquad \alpha' + \beta' + \gamma' = 0, \qquad \alpha'' + \beta'' + \gamma'' = 0.$$

Le cône circonscrit à la surface et ayant pour sommet $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ se compose de six plans qui coupent le plan $x_4 = 0$ suivant les droites suivantes

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 0, \qquad x_3 = 0,$$

$$\sigma_1 = \frac{x_1}{\alpha} + \frac{x_2}{\beta} + \frac{x_3}{\gamma} = 0, \qquad \sigma_1' = \frac{x_1}{\alpha'} + \frac{x_2}{\beta'} + \frac{x_3}{\gamma'} = 0, \qquad \sigma_2'' = \frac{x_1}{\alpha''} + \frac{x_2}{\beta''} + \frac{x_3}{\gamma''} = 0;$$

la surface considérée sera donc représentable sur la surface

$$z^2 = x_1 x_2 x_3 \sigma_1 \sigma_1' \sigma_1'';$$

d'ailleurs, les six droites

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \sigma_1'' = 0$$

sont tangentes à une même conique enveloppe de la droite

$$\frac{x_1}{u} + \frac{x_2}{v} + \frac{x_3}{w} = 0,$$

u, v, w satisfaisant à la relation

$$u + v + w = 0;$$

---

[1] *Journal de Crelle*, t. 73.

tous les cycles linéaires tracés sur une surface de Kummer se réduiront donc à zéro, en vertu de la remarque faite au sujet de la surface (7).

7. Supposons que, dans le second membre de l'équation (7), le nombre des polynomes irréductibles σ soit égal à trois. On aura la surface

$$z^2 = \sigma_m \sigma_n \sigma_r; \tag{8}$$

nous allons considérer le cas où les courbes

$$\sigma_m = 0, \qquad \sigma_n = 0, \qquad \sigma_r = 0$$

se coupent au même point O, ce point étant simple pour chacune des trois courbes et les tangentes en ce point étant toutes distinctes.

Si nous plaçons l'origine au point O, nous voyons que, pour une valeur voisine de zéro, les polynomes en x, σ_m, σ_n, σ_r admettront chacun une racine infiniment petite. Soient

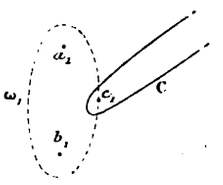
$$a_1, \quad b_1, \quad c_1$$

les trois racines infiniment petites et envisageons un cycle C formé autour de la racine c_1 et d'une autre racine des polynomes σ_m, σ_n, σ_r différente de a_1, b_1. Ce cycle C, quand y aura tourné autour de l'origine dans son plan, se reproduira lui-même, augmenté de deux fois un cycle ω_1 entourant les racines a_1 et b_1 (*fig.* 9). Nous pouvons donc écrire

$$\omega_1 = 0.$$

De même, si l'on désigne par ω_2 un cycle comprenant à son intérieur les ra-

Fig. 9.



cines b_1 et c_1, ce cycle étant obtenu d'une façon analogue à celle qui a donné ω_1, nous aurons une condition nouvelle s'exprimant par l'équation

$$\omega_2 = 0$$

et, par conséquent, la surface (8) n'aura pas de cycles finis. C'est ce qu'on peut voir encore de la manière suivante.

La surface (8) est de la forme

$$z^2 = (x + ay + \ldots)(x + by + \ldots)(x + cy + \ldots);$$

les termes non écrits dans chaque parenthèse étant de degré supérieur au premier et les quantités a, b, c étant toutes différentes. La transformation

$$x = XY, \qquad y = Y, \qquad z = ZY^2$$

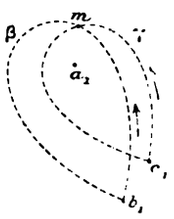
nous donnera alors la surface

$$Z^2 = Y[X + a + Y(\ldots)][X + b + Y(\ldots)][X + c + Y(\ldots)].$$

Les courbes transformées de σ_m, σ_n, σ_r coupent la droite $Y = 0$ en des points simples sur ces courbes et tous distincts. Ce sont les points ayant respectivement pour abscisses $-a$, $-b$, $-c$. Il suffit alors d'appliquer la remarque du numéro précédent.

Soit le cas particulier où les deux courbes σ_n, σ_r viendraient à être tangentes à l'origine. Un cycle C entourant la racine c_1 et une autre racine non infiniment petite se sera accru, après une révolution de y autour de l'origine, de deux fois un cycle ω_1 entourant a_1 et b_1 ou de deux fois un cycle ω_3 correspondant aux racines a_1 et c_1. Ce dernier cas se présentera si, les points b_1 et c_1 décrivant respectivement les courbes β et γ marquées sur la *fig.* 10, par suite de la variation

Fig. 10.



de y, il arrive que le point b_1 passe au point m avant que le point c_1 y soit arrivé. On sera toujours assuré que l'une au moins des deux équations suivantes

$$\omega_1 = 0, \qquad \omega_3 = 0$$

est vérifiée, et comme la condition

$$\omega_2 = 0$$

subsiste évidemment, il s'ensuit que, dans le cas actuel, la connexion linéaire de la surface (8) sera encore d'ordre un.

Si les courbes σ_m, σ_n, σ_r sont tangentes au même point O, qui est toujours supposé simple sur ces courbes, il pourra encore arriver que tous les cycles de la

surface (8) soient réductibles à zéro. Supposons, par exemple, que σ_m et σ_n soient de degré impair, σ_r étant de degré pair, et admettons, de plus, qu'aux environs de l'origine O les racines infiniment petites a_1, b_1, c_1 déjà considérées aient des développements de la forme

$$\begin{aligned} x &= a_1 y^3 + \ldots && \text{pour} \quad \sigma_m, \\ x &= b_1 y^2 + \ldots && \sigma_n, \\ x &= c_1 y^3 + \ldots && \sigma_r \end{aligned}$$

$$(a_1 b_1 c_1 \neq 0);$$

posons alors

$$x = XY^2, \qquad y = Y, \qquad z = ZY^3,$$

nous serons conduits à la surface

$$Z^2 = [X - a_1 Y + Y(\ldots)][X - b_1 + Y(\ldots)][X - c_1 Y + Y(\ldots)]$$

qui peut s'écrire encore

$$Z^2 = \sigma'_m \sigma'_n \sigma'_r.$$

Les courbes σ'_m, σ'_n seront de degré impair; comme nous l'avons vu, cela diminuera le nombre des cycles effectifs de la surface d'une unité. Enfin, les courbes σ'_m et σ'_r se coupant en un point simple pour chacune d'elles à l'origine, il s'ensuit que tous les cycles de la surface seront équivalents à zéro.

Au contraire, si les développements des racines a_1, b_1, c_1 sont de la forme

$$\begin{aligned} x &= a_1 y^2 + \ldots, \\ x &= b_1 y^2 + \ldots, \\ x &= c_1 y^2 + \ldots \end{aligned}$$

$$(a_1 b_1 c_1 \neq 0),$$

la surface (8) pourra admettre des cycles non réductibles à des cycles nuls. Dans ce cas, un cycle C entourant la racine c_1 et une autre racine non infiniment petite, s'accroît, par une révolution de y, de quatre cycles formés autour de a_1 et b_1, et dont la somme est nulle. Cela ne donne plus, comme précédemment, une condition ayant pour effet de réduire le nombre des cycles de la surface.

Ainsi, la surface

$$z^2 = (x - a_1 y^2)(x - b_1 y^2)(x - c_1 y^2)$$

admet deux cycles finis; elle est, en effet, représentable sur un cylindre cubique.

8. Nous terminerons ces quelques remarques en revenant un instant à la sur-

face (5)

$$(5) \qquad z^2 = \sigma_m \sigma_n.$$

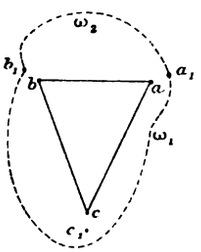
Si la courbe σ_m admet un point double à tangentes distinctes à l'origine, et la courbe σ_n un point simple, nous savons que sur la surface (5) tous les cycles linéaires se réduisent à des cycles nuls. Nous voulons faire voir qu'il en sera encore ainsi dans le cas où l'origine serait un point de rebroussement pour σ_m; nous supposons que l'origine est un point simple sur σ_n et, de plus, que σ_n n'est pas tangente à σ_m en ce point.

L'équation en x, $\sigma_m = 0$, admettra, pour y voisin de zéro, deux racines infiniment petites a_1, b_1. Désignons par c_1 la racine infiniment petite de $\sigma_n = 0$. Le résultat à établir est évident si les deux racines a_1, b_1 n'appartiennent pas à un même système circulaire. Admettons donc que a_1 et b_1 se permutent quand l'argument de y augmente de 2π.

Considérons alors deux cycles C et C_1, entourant, le premier, la racine b_1 et une racine non infiniment petite; le second, la racine c_1 et une racine aussi non infiniment petite.

Après une circulation de y autour de l'origine, C se sera accru de deux fois un cycle ω_1 correspondant aux racines a_1 et b_1; C_1, en même temps, se sera reproduit, augmenté de deux fois un cycle ω_2, correspondant aux mêmes racines a_1 et b_1, mais différent de ω_1 (*fig.* 11).

Fig. 11.



D'ailleurs, le cycle formé des chemins marqués par un trait continu (*fig.* 11), (bc), (ca), (ab) [1], cycle qu'on suppose ne contenir aucune racine à son intérieur, est évidemment un cycle nul. On aura donc

$$(bc) + (ca) + (ab) = 0.$$

De plus, les conditions

$$\omega_1 = 0, \qquad \omega_2 = 0,$$

[1] Les points a, b, c sont supposés infiniment voisins respectivement des points a_1, b_1, c_1.

que nous pouvons écrire, équivalent aux équations suivantes :

$$(bc) - (ca) = 0,$$
$$(ab) = 0$$

et, par conséquent, il viendra

$$(ab) = (bc) = (ca) = 0.$$

En particulier, la condition

$$(bc) = 0$$

exprime qu'on peut former un cycle équivalent à zéro, avec une racine de $\sigma_m = 0$ et une racine de $\sigma_n = 0$. Notre proposition est ainsi démontrée : les cycles de la surface (5), dans le cas qui vient d'être considéré, sont tous des cycles nuls.

On pouvait encore procéder de la façon suivante. L'équation de la surface (5) peut se mettre sous la forme

$$z^2 = [(ax + by)^2 + \ldots][a'x + b'y + \ldots] = \sigma_m \sigma_n$$
$$(ab' - ba' \neq 0).$$

On suppose que les axes des x et des y rencontrent les courbes σ_m et σ_n, en dehors de l'origine, en $m + n - 3$ points simples et tous distincts et que les tangentes à l'origine aux deux courbes ne coïncident pas avec les axes.

Effectuons alors la transformation

$$x = X, \qquad y = \frac{X}{Y};$$

nous serons amenés à considérer la surface

$$z^2 = x[(ay + b)^2 y^m + x(\ldots)][(a'y + b')y^n + x(\ldots)] = x\,\sigma'_m\,\sigma'_n.$$

La droite $x = 0$ rencontre la courbe $\sigma'_n = 0$ en un point simple

$$x = 0, \qquad y = -\frac{b'}{a'},$$

ce point n'étant pas sur $\sigma'_m = 0$. Avec la racine $x = 0$ et une racine de $\sigma'_n = 0$, on pourra donc former un cycle nul.

Si le point $\left(x = 0, y = -\frac{b}{a}\right)$ est un point simple sur σ'_m ou un point double à tangentes distinctes, la proposition est démontrée. Si, au contraire, ce point est, sur σ'_m, un point double à tangentes confondues, on transportera l'origine en ce point, on effectuera sur x, y la transformation homographique la plus géné-

rale, et l'on recommencera la transformation

$$x = X, \qquad y = \frac{X}{Y};$$

on sait [1] qu'après un nombre fini d'opérations on arrivera à résoudre la singularité du point double considéré.

9. On verra aisément que les surfaces représentées par l'équation

$$z^2 = f_4(x, y),$$

où $f_4(x, y)$ désigne un polynome du quatrième degré en x et y, n'ont pas de cycles linéaires finis, à l'exception, toutefois, du cas où $f_4(x, y) = 0$ se décompose en quatre droites concourantes.

Disons encore que, pour une surface ayant pour équation

$$z^2 = f(x, y),$$

on peut, sans diminuer la généralité, se borner à considérer le cas où f est de degré pair. Si, en effet, f est d'ordre impair, on pourra, si l'on veut, effectuer la transformation

$$x = \frac{1}{X}, \qquad y = \frac{Y}{X}, \qquad z = \frac{Z}{X^{m+1}},$$

$2m + 1$ désignant le degré de f. On sera conduit alors à une surface

$$Z^2 = X f_1(X, Y) = F(X, Y),$$

F étant d'ordre pair.

10. On peut citer des surfaces dont l'équation n'est pas de la forme

$$z^2 = f(x, y),$$

et pour lesquelles, cependant, tous les cycles, après avoir été amenés dans un continuum $y =$ const., se réduiront à des contours entourant seulement deux racines d'une certaine équation en x

$$R(x, y) = 0,$$

où y a la valeur constante considérée.

---

[1] E. Picard, *Traité d'Analyse*, t. II, Chap. XIII.

Soit, par exemple, la surface

$$(7) \qquad Az^3 + 3Bz^2 + 3Cz + D = 0,$$

A désignant une constante et B, C, D des polynomes en x et y.

Posons

$$\begin{aligned} R(x, y) &= (AD - BC)^2 - 4(AC - B^2)(BD - C^2), \\ U &= (AD - BC)A - 2B(AC - B^2), \\ P &= \tfrac{1}{2}(U - A\sqrt{R}), \\ Q &= \tfrac{1}{2}(U + A\sqrt{R}). \end{aligned}$$

z sera alors donné par la formule

$$Az = -B - \varepsilon\sqrt[3]{P} - \varepsilon^2\sqrt[3]{Q},$$

ε étant une racine cubique quelconque de l'unité. D'ailleurs, les deux radicaux qui entrent dans cette expression sont liés par la relation

$$\sqrt[3]{P}\sqrt[3]{Q} = -(AC - B^2).$$

Supposons que U et R, qui sont des polynomes en x et y, n'admettent pas de facteur commun. Il suffit de considérer les cycles de la surface situés dans l'espace $y = y_0$. On pourra, d'ailleurs, choisir la valeur y_0, de telle sorte que les deux équations

$$P = 0, \qquad Q = 0,$$

ne puissent être satisfaites pour une même valeur de x. Tout cycle de la surface correspondra alors à une courbe enveloppant deux racines de l'équation

$$R(x, y_0) = 0.$$

Plusieurs des remarques précédemment faites seront applicables dans le cas actuel. En particulier, si la courbe

$$R(x, y) = 0$$

est irréductible, la surface (7) n'aura pas de cycles finis.

Soit encore une surface de la forme

$$(8) \qquad z = \sqrt{f(x, y)} + \sqrt{g(x, y)},$$

f et g étant des polynomes en x et y. Si ces polynomes sont irréductibles, sur la surface (8), tous les cycles linéaires se réduiront aussi à zéro.

CHAPITRE II.

I. — Connexion linéaire des surfaces $z^2 = f_6(x, y)$.

Nous allons considérer, au point de vue de la connexion linéaire, les surfaces du sixième degré de la forme

$$z^2 = f_6(x, y).$$

Si l'on veut qu'une telle surface puisse admettre des cycles finis, il faudra supposer que la courbe

$$f_6(x, y) = 0$$

se décompose en deux ou plusieurs courbes. Différents cas pourront se présenter.

1. *f_6 se décompose en une quartique et deux droites, ou une quartique et deux coniques.* — Étant donnée une surface ayant pour équation

$$z^2 = \sigma_m \sigma_n \sigma_r \ldots,$$

la notation

$$(\sigma_m, \sigma_n) = 0,$$

voudra signifier que, pour $y = y_0$, les polynomes en x, σ_m et σ_n admettant un certain nombre de racines, on peut, avec une racine de $\sigma_m = 0$ et une racine de $\sigma_n = 0$, former un cycle équivalent à zéro sur la surface donnée.

Cela étant, soit la surface

$$z^2 = \sigma_4 \sigma_1 \sigma'_1; \tag{1}$$

deux des polynomes du second membre étant de degré impair, il s'ensuit (Chap. I, n° 5) que la surface admettra, au plus, un cycle fini.

Si les droites σ_1, σ'_1 se coupent en un point simple de σ_4, on aura évidemment

$$(\sigma_4, \sigma_1) = 0,$$

et la surface (1) n'admettra aucun cycle fini.

Si les droites σ_1, σ'_1 se coupent en un point double de σ_4, la surface (1) sera unicursale [1].

---

[1] M. Nœther a démontré que si une surface F est telle qu'une famille de surfaces dépendant linéairement d'un paramètre α la coupent chacune suivant une courbe unicursale, cette surface F est unicursale. [*Ueber Flächen welche Schaaren rationaler Curven besitzen* (*Math. Annalen*, Bd 3).] M. Picard a repris cette question à un autre point de vue. (*Archiv der Mathematik und Physik*, 1901.)

Supposons donc que σ_1, σ'_1 ne se coupent pas sur σ_4 et que la quartique ayant un point de rebroussement en un point O, σ_1 soit la tangente de rebroussement. Nous pourrons rejeter σ'_1 à l'infini et prendre pour équation de la surface

$$z^2 = x(x^2 + \ldots) = x\,\sigma_4,$$

les termes non écrits dans la parenthèse étant de degré supérieur au second. Si dans σ_4 existe le terme en y^3, la transformation

$$x = XY, \qquad y = Y,$$

nous conduira à une surface

$$z^2 = xy\,(y + \ldots)$$

qui n'admet pas de cycles finis (Chap. I, n° 7). Si le terme en y^3 n'existe pas dans σ_4, on remarquera que la quartique ne saurait admettre plus d'un point de rebroussement de cette nature. On voit ainsi que la surface (1) n'aura jamais de cycles finis.

Si, au lieu de l'équation (1), on a l'équation (1)',

$$(1)' \qquad z^2 = \sigma_4\,\sigma_2,$$

le seul cas à considérer sera celui où, σ_4 ayant un point de rebroussement, la conique σ_2 serait tangente à la quartique en ce point.

Si le rebroussement est de première espèce, on raisonnera comme plus haut, lorsqu'on supposait que la droite σ_1 était tangente à σ_4 en un point de rebroussement du même genre.

Si le rebroussement est de seconde espèce, nous pourrons, après une transformation homographique, poser,

$$\sigma_4 = x^4 + x(\alpha x^2 + \beta xy) + \alpha' x^2 + \beta' xy + \gamma' y^2 + mx + ny + l,$$
$$\sigma_2 = x^2 - y;$$

le point de rebroussement a été rejeté à l'infini sur la droite $x = 0$, la droite de l'infini étant devenue la tangente de rebroussement.

Dès lors, il suffit d'effectuer la transformation

$$x = X, \qquad y - x^2 = Y,$$

pour être conduit à une surface déjà considérée,

$$z^2 = \sigma_4\,\sigma_1.$$

Tous les cycles d'une surface telle que (1)' seront donc équivalents à zéro. Soit,

comme application, la surface des centres de la quadrique

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0.$$

Si l'on prend la polaire réciproque de cette surface [1], par rapport à la sphère,

$$x^2+y^2+z^2=1,$$

on obtient la surface du quatrième degré suivante,

$$(x^2+y^2+z^2)^2=\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2-1)$$

et, si l'on pose

$$x=XZ,\qquad y=YZ,\qquad z=Z,$$

à la surface précédente on pourra faire correspondre birationnellement la surface

$$z^2=\left[(a^2x^2+b^2y^2+c^2)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)-(x^2+y^2+1)^2\right]\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$$

qui est bien de la forme

$$z^2=\sigma_4\,\sigma_2$$

et, par conséquent, l'ordre de connexion linéaire de la surface des centres considérée sera égal à un.

2. *f_6 se décompose en une cubique, une conique et une droite, ou en une cubique et trois droites.* — La surface

$$z^2=\sigma_3\,\sigma_2\,\sigma_1 \tag{2}$$

aura, au plus, un cycle fini, et l'on voit aisément que si la droite σ_1 coupe la conique σ_2 en deux points distincts, tous les cycles se réduiront à des cycles nuls.

Il en sera encore ainsi dans le cas où la droite σ_1 serait tangente à σ_2. Le seul cas où cela n'apparaisse pas immédiatement est celui où l'on supposerait que σ_3 et σ_2 sont tangentes à σ_1 au même point. Si l'on rejette σ_1 à l'infini, on pourra, dans cette hypothèse, écrire

$$\sigma_3=x_2(x+\alpha y)+\varphi_2(x,y)+\ldots,$$
$$\sigma_2=x^2-y;$$

---

[1] SALMON, *Traité de Géométrie analytique à trois dimensions* (Ire Partie).

mais alors la transformation

$$x = X, \qquad y - x^2 = Y,$$

nous amènera à considérer une surface ayant pour équation

$$z^2 = \sigma_m \sigma_1,$$

σ_m désignant une courbe du troisième ou du quatrième degré.

Si l'on suppose que la conique σ_2 se décompose en deux droites, nous aurons alors la surface

$$(2)' \qquad z^2 = \sigma_3 \sigma_1 \sigma'_1 \sigma''_1.$$

Nous aurons d'abord la relation (Chap. I, n° 5),

$$(\sigma_3, \sigma_1) + (\sigma'_1, \sigma''_1) = 0,$$

et, par conséquent, la surface $(2)'$ admettra au plus deux cycles finis. Il est facile de voir que ces deux cycles eux-mêmes se réduiront à zéro. En effet, supposons que les trois droites σ forment un triangle.

Si la cubique σ_3 a un point double en un sommet du triangle, la surface sera unicursale.

Si un sommet du triangle, celui, par exemple, qui se trouve au point de rencontre de σ_1 et σ'_1, est un point simple pour σ_3, il viendra, dans ce cas,

$$(\sigma_3, \sigma_1) = 0, \qquad (\sigma_1, \sigma'_1) = 0.$$

Si aucun sommet du triangle, formé par les droites σ, ne se trouve sur la cubique, on pourra évidemment écrire

$$(\sigma_1, \sigma'_1) = 0, \qquad (\sigma'_1, \sigma''_1) = 0,$$

et l'équation toujours vérifiée

$$(\sigma_3, \sigma_1) + (\sigma'_1, \sigma''_1) = 0,$$

donnera ensuite

$$(\sigma_3, \sigma_1) = 0.$$

Enfin, si les droites σ sont concourantes, σ_3 ne passera pas en leur point de concours, sinon la surface serait unicursale. D'où il suit encore

$$(\sigma_1, \sigma'_1) = 0, \qquad (\sigma'_1, \sigma''_1) = 0,$$

et aussi

$$(\sigma_3, \sigma_1) = 0.$$

3. *f_6 se décompose en trois coniques.* — La surface

$$z^2 = \sigma_2 \sigma'_2 \sigma''_2 \tag{3}$$

admettra au plus deux cycles finis.

Supposons, par exemple, que les coniques σ_2, σ'_2 soient tangentes en un point m et se coupent en deux autres points n, p. Si la conique σ''_2 passe en l'un des points n, p, il en résultera

$$(\sigma_2, \sigma'_2) = 0, \qquad (\sigma'_2, \sigma''_2) = 0.$$

D'ailleurs ces conditions seront encore vérifiées si la conique σ''_2 ne passe ni en n, ni en p, car alors σ''_2 rencontrera l'une au moins des coniques σ_2, σ'_2 en un point distinct de m.

On verra aisément, sans qu'il soit nécessaire d'entrer dans plus de détails, que si les trois coniques σ ne sont pas tangentes deux à deux en deux mêmes points, ou surosculatrices deux à deux en un même point, la surface (3) n'admettra pas de cycles finis.

Si les coniques σ sont tangentes deux à deux en deux mêmes points, l'équation (3) pourra s'écrire

$$z^2 = (xy + a)(xy + b)(xy + c),$$
$$a \neq b, \qquad b \neq c, \qquad abc \neq 0,$$

et si nous posons

$$xy = X, \qquad y = Y,$$

la surface transformée sera le cylindre cubique

$$z^2 = (x + a)(x + b)(x + c)$$

et, par suite, la surface considérée possédera deux cycles finis.

Si les coniques σ sont surosculatrices deux à deux en un même point, la surface (3) pourra, dans ce cas, être ramenée à la forme

$$z^2 = (y^2 + x + a)(y^2 + x + b)(y^2 + x + c)$$

et la transformation

$$y^2 + x = X, \qquad y = Y,$$

nous conduira encore à un cylindre cubique.

Si la conique σ''_2 vient à se décomposer en deux droites, on aura à considérer la surface

$$z^2 = \sigma_2 \sigma'_2 \sigma_1 \sigma'_1. \tag{3'}$$

Nous pouvons écrire (Chap. I, n° 5)

$$(\sigma_1, \sigma'_1) = 0.$$

c'est-à-dire que la surface $(3)'$, comme la surface (3), ne saurait admettre plus de deux cycles finis distincts. Si l'on considère l'ensemble des deux droites σ comme représentant une conique, la discussion sera la même que pour la surface (3). On ne pourra avoir de cycles finis que lorsque les coniques σ_2, σ'_2 et la conique formée par l'ensemble des deux droites σ seront tangentes deux à deux en deux mêmes points, ou surosculatrices deux à deux en un même point. Le premier cas, seul, pourra se présenter : c'est le cas où σ_2 et σ'_2 étant bitangentes, les droites σ_1, σ'_1 sont les tangentes communes à ces deux coniques. La surface $(3)'$ devient alors, après une transformation homographique convenable,

$$z^2 = xy(xy + a)(xy + b),$$
$$a \neq b, \qquad ab \neq 0,$$

il existera deux cycles finis sur cette surface.

4. *f_6 se décompose en une conique et quatre droites.* — Considérons une surface de la forme

$$z^2 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma'_1 \sigma''_1 \sigma'''_1. \tag{4}$$

Si les droites σ forment un quadrilatère et si la conique σ_2 ne passe par aucun sommet du quadrilatère, on aura évidemment

$$(\sigma_1, \sigma'_1) = 0, \qquad (\sigma'_1, \sigma''_1) = 0, \qquad (\sigma''_1, \sigma'''_1) = 0,$$

et aussi

$$(\sigma_2, \sigma_1) = 0,$$

puisque la conique σ_2 rencontrera la droite σ_1 en des points qui donnent lieu à cette relation.

Si la conique σ_2 passe en l'un des points d'intersection des droites σ, les équations précédentes subsisteront encore. Le cas où trois des quatre droites σ seraient concourantes ne présente, non plus, aucune difficulté.

5. Les cycles de la surface

$$z^2 = f_6(x, y),$$

où $f_6 = 0$ représente six droites, sont tous réductibles à zéro, à moins que les six droites ne soient concourantes. La surface, dans ce cas, est représentable sur un cylindre du sixième degré.

En résumé, les surfaces

$$z^2 = f_6(x, y),$$

qui admettent des cycles finis sont celles pour lesquelles f_6 se décompose :

Soit, en trois coniques tangentes deux à deux, en deux mêmes points, l'une de ces coniques pouvant se décomposer en deux droites;

Soit, en trois coniques surosculatrices deux à deux, en un même point;

Soit, en six droites concourantes.

En d'autres termes, parmi les surfaces considérées, celles dont l'ordre de connexion linéaire n'est pas égal à un sont représentables sur des surfaces coniques.

II. — Application aux surfaces du quatrième degré.

1. Étant donnée une surface du quatrième degré non rationnelle, ni cylindrique, ni conique

$$F(x, y, z) = 0,$$

si cette surface n'admet aucune singularité, son ordre de connexion linéaire sera égal à un. Nous pouvons donc supposer, pour la question qui nous occupe, que F a, au moins, un point double. S'il existait un point triple sur F, la surface serait unicursale.

Soit donc une surface du quatrième degré ayant, au moins, un point double que nous supposerons à l'infini sur Oz. L'équation d'une telle surface sera de la forme

$$z^2 \varphi_2(x, y) + 2z \varphi_3(x, y) + \varphi_4(x, y) = 0. \tag{1}$$

L'équation du cylindre circonscrit à cette surface, parallèlement à Oz, s'obtiendra en annulant le polynome $f(x, y)$ défini par la formule

$$f(x, y) = \varphi_3^2 - \varphi_2 \varphi_4.$$

La courbe $f = 0$, qui est du sixième degré, est la courbe de passage (*Uebergangs Curve*) de la surface (1). Cette surface (1) correspond birationnellement à la surface

$$z^2 = f(x, y). \tag{2}$$

2. Le polynome f pourra être divisible par le carré d'une expression linéaire u en x, y

$$f = u^2 \psi(x, y),$$

$\psi(x, y)$ étant du quatrième degré. Si l'on veut, alors, que la surface (1) admette des cycles finis, il faudra que $\psi(x, y) = 0$ se décompose en *quatre droites concourantes*.

Si f ne contient aucun facteur linéaire carré, la surface (1) admettra des cycles finis, lorsque la courbe $f = 0$ se décomposera :

Soit, en trois coniques tangentes deux à deux, en deux mêmes points, l'une de ces coniques pouvant se décomposer en deux droites;

Soit, en trois coniques surosculatrices deux à deux en un même point.

Si $f = 0$ se décomposait en six droites concourantes, la surface (1) correspondante serait un cylindre ou un cône.

3. Considérons, d'abord, le cas où l'on aurait

$$(3) \qquad f(x, y) = \varphi_3^2 - \varphi_2 \varphi_4 = u^2 \sigma_1 \sigma_1' \sigma_1'' \sigma_1''',$$

les équations

$$\sigma_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad \sigma_1''' = 0$$

représentant quatre droites concourantes.

Supposons, en premier lieu, que φ_3 ne soit pas divisible par u. Si $u = 0$ est l'équation d'une droite ne passant pas au point de concours des droites σ, nous pourrons, après une transformation homographique convenable, ramener l'identité (3) à la suivante

$$(4) \qquad \varphi_3^2 - \varphi_2 \varphi_4 = x^2 (y + a)(y + b)(y + c)(y + d),$$

$\varphi_2 = 0$ sera une conique tangente à chacune des droites σ. Cette conique sera donc formée de deux droites passant au point à l'infini sur Ox, ou d'une droite double. Cette droite double devra, d'ailleurs, passer au point de concours des droites σ; car, autrement, les points d'intersection de cette droite avec les droites σ seraient des points doubles pour la courbe $f(x, y) = 0$, ce qui ne saurait être.

Mettons l'identité (4) sous la forme

$$(5) \qquad \frac{\varphi_3^2 - x^2 (y + a)(y + b)(y + c)(y + d)}{\varphi_2} = \varphi_4$$

et supposons que l'on ait

$$\varphi_2 = (y + \alpha)(y + \beta),$$

α et β désignant deux quantités quelconques, mais différentes. Le numérateur du premier membre de (5) est une expression en x, telle que tous les coefficients des différentes puissances de x, dans cette expression, devront être divisibles par φ_2. On en déduit que φ_3 sera du premier degré en x,

$$\varphi_3 = \mathrm{A}x + \mathrm{B}.$$

La cubique $\varphi_3 = 0$ aura un point double à l'infini sur Ox, et il en sera de même

pour φ_4, c'est-à-dire qu'on aura

$$\varphi_4 = A'x^2 + 2B'x + C',$$

A', B', C' étant des polynomes en y.

On arrivera au même résultat si l'on suppose que φ_2 a pour expression

$$\varphi_2 = (y+\alpha)^2,$$

α n'étant égal à aucune des quantités a, b, c, d. Il ne pourra, en effet, arriver que l'on ait pour φ_2, par exemple,

$$\varphi_2 = (y+a)^2,$$

car, alors, le premier membre de (4) serait divisible par $(y+a)^2$, et le second membre, par $(y+a)$ seulement.

Si l'on pose $\varphi_2 = C$, l'identité (4) deviendra

$$(Ax+B)^2 - C(A'x^2 + 2B'x + C') = x^2(y+a)(y+b)(y+c)(y+d),$$

avec les conditions

$$(6) \qquad B^2 - CC' \equiv 0, \qquad AB - CB' \equiv 0,$$

et la surface du quatrième degré correspondante sera

$$(7) \qquad Cz^2 + 2z(Ax+B) + A'x^2 + 2B'x + C' = 0;$$

cette équation peut s'écrire, en vertu de la première des relations (6),

$$C\left(z + \frac{B}{C}\right)^2 + x(2Az + A'x + 2B') = 0;$$

cette surface serait unicursale, comme on le voit, en posant

$$z + \frac{B}{C} = xZ,$$

elle ne saurait donc être représentable sur le cylindre

$$z^2 = (y+a)(y+b)(y+c)(y+d),$$

et, par conséquent, si la droite $u = 0$ ne passe pas au point de concours des droites σ, on ne peut satisfaire à l'identité (3), en supposant que φ_3 n'est pas divisible par u.

Soit, maintenant, le cas où l'équation $u = 0$ représente une droite passant par le point de concours des droites σ; $f(x,y)$ pourra, alors, se mettre sous la

forme

$$(8)\qquad f(x,y)=\varphi_3^2-\varphi_2\varphi_4=y^2(y+a)(y+b)(y+c)(y+d).$$

Admettons que φ_3 ne soit pas divisible par y.

Le polynome en y, φ_2, aura pour expression

$$\varphi_2=(y+\alpha)(y+\beta),$$

ou

$$\varphi_2=(y+\gamma)^2,$$

α et β étant des quantités quelconques, mais différentes; γ peut aussi prendre toutes les valeurs, sauf les valeurs a, b, c, d.

Le polynome φ_3 ne contiendra x qu'au premier degré

$$\varphi_3=Ax+B,$$

et, par suite, φ_4 contiendra x, au second degré seulement,

$$\varphi_4=A'x^2+2B'x+C',$$

φ_2 devant diviser l'expression

$$\varphi_3^2-y^2(y+a)(y+b)(y+c)(y+d),$$

il s'ensuit que le polynome A, en y, du second degré, sera divisible par φ_2; si l'on pose $\varphi_2=C$, il viendra donc

$$A=\lambda C,$$

λ étant une constante.

L'identité (8) entraîne, d'ailleurs, les conditions suivantes :

$$A^2-CA'=0,\qquad AB-CB'=0,$$

d'où l'on tire

$$A'=\lambda^2C,\qquad B'=\lambda B,$$

et, dès lors, la surface

$$Cz^2+2z(Ax+B)+A'x^2+2B'x+C'=0$$

sera un cylindre, car l'équation précédente peut s'écrire

$$C(z+\lambda x)^2+2B(z+\lambda x)+C'=0.$$

Ainsi, étant donnée une surface dont l'équation est de la forme

$$z^2\varphi_2(x,y)+2z\varphi_3(x,y)+\varphi_4(x,y)=0,$$

si cette surface du quatrième degré n'est pas rationnelle; si elle n'est ni cylin-

drique, ni conique, et si, de plus, elle est représentable sur le cylindre

$$z^2 = u^2(y+a)(y+b)(y+c)(y+d),$$

u étant une expression linéaire en x et y, on sera assuré que le polynome φ_3 est divisible par u. On pourra donc écrire

$$\varphi_3(x,y) = u\,\psi_2(x,y).$$

Si l'on revient à l'identité (3), on voit que le produit $\varphi_2\varphi_4$ sera divisible par u^2. Il n'est pas admissible que φ_2 et φ_4 soient, simultanément, divisibles par u; car, alors, la surface du quatrième degré se décomposerait.

4. Soit d'abord

$$\varphi_4 = u^2\chi_2(x,y);$$

nous aurons à considérer l'identité

$$\psi^2 - \varphi_2\chi_2 = (y+a)(y+b)(y+c)(y+d) = \varpi(y),$$

on voit facilement que les équations

$$\varphi_2 = 0, \qquad \chi_2 = 0$$

devront représenter des droites passant par le point à l'infini sur Ox; φ_2 et χ_2 seront ainsi des polynomes, du second degré, en y. Il en sera de même pour ψ_2, et nous aurons, alors, à considérer la surface

$$z^2\varphi_2(y) + 2zu\,\psi_2(y) + u^2\chi_2(y) = 0.$$

Si u ne dépend que de y, cette surface sera un cylindre. Sinon, on pourra poser

$$u = x,$$

et il viendra alors la surface du quatrième degré à deux droites doubles non concourantes

$$\text{(I)} \qquad z^2\varphi_2(y) + 2zx\,\psi_2(y) + x^2\chi_2(y) = 0.$$

Soit, en second lieu,

$$\varphi_2 = u^2,$$

l'identité

$$\psi_2^2 - \varphi_4 = \varpi(y)$$

pourra être satisfaite de deux manières différentes, suivant que l'on prendra pour ψ_2 une fonction de x et y, ou une fonction de y seulement. Dans ce dernier cas,

φ_4 ne dépendra, non plus, que de y, et nous obtiendrons la surface

$$z^2u^2 + 2zu\psi_2(y) + \varphi_4(y) = 0,$$

u devra contenir x, et l'on pourra poser encore $u = x$. La surface qu'on aura ainsi,

$$\text{(II)} \qquad z^2x^2 + 2zx\psi_2(y) + \varphi_4(y) = 0,$$

peut être considérée comme étant la transformée homographique d'une surface de révolution.

Si, maintenant, on suppose que ψ_2 est fonction de x et y, φ_4 sera alors donné par la formule

$$\varphi_4 = \psi_2^2(x, y) - \varpi(y),$$

ce qui nous conduira à la surface

$$z^2u^2 + 2zu\psi_2(x, y) + \psi_2^2(x, y) - \varpi(y) = 0.$$

Si la droite $u = 0$ passe par le point de concours des droites $\varpi(y) = 0$, on pourra prendre pour la droite de l'infini cette droite u. La surface, correspondant à ce cas, aura pour équation

$$\text{(III)} \qquad z^2 + 2z\psi_2(x, y) + \psi_2^2(x, y) - \varpi(y) = 0.$$

Au contraire, si l'on peut poser $u = x$, il viendra

$$z^2x^2 + 2zx\psi_2(x, y) + \psi_2^2(x, y) - \varpi(y) = 0;$$

cette surface est une transformée homographique d'une surface de révolution du quatrième degré. On peut, en effet, écrire ainsi son équation

$$[zx + \psi_2(x, y)]^2 - \varpi(y) = 0.$$

Soit alors

$$\psi_2(x, y) = ax^2 + bxy + \ldots$$

et effectuons la transformation

$$x = X + iZ,$$
$$z + ax = X - iZ,$$

il viendra la surface

$$[Z^2 + X^2 - 2\alpha X - 2\beta Z + \gamma]^2 - \varpi(y) = 0,$$

α et β étant des expressions du premier degré en y. La nouvelle transformation homographique

$$Z = z + \beta,$$
$$X = x + \alpha$$

nous donnera la surface de révolution

$$(z^2 + x^2 + \delta)^2 - \varpi(y) = 0,$$

δ étant un polynome du second degré en y.

5. Nous devons maintenant considérer le cas où l'expression $f(x, y)$ ne serait divisible par aucun facteur linéaire carré.

Et, d'abord, supposons que $f(x, y)$ se décompose en trois coniques tangentes deux à deux en deux mêmes points. Nous aurons à satisfaire à l'identité

$$(9) \qquad f(x, y) = \varphi_2^2 - \varphi_3\varphi_4 = A(x - ay^2)(x - by^2)(x - cy^2) = \sigma_2\sigma_2'\sigma_2''.$$

On voit que la conique

$$\varphi_2 = 0$$

devra être bitangente ou surosculatrice à chacune des coniques σ. On pourra donc écrire

$$\varphi_2 = x - ay^2 + \lambda P^2 = x - by^2 + \mu Q^2 = x - cy^2 + \nu R^2.$$

Si l'une des quantités λ, μ, ν est infinie, la conique φ_2 se réduira à une droite double. Il viendra

$$\varphi_2 = (\alpha x + \beta y + \gamma)^2.$$

Si la droite

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

ne coïncide pas avec la corde des contacts des coniques σ, ou avec l'une de leurs tangentes communes, cette droite rencontrera l'ensemble des coniques σ, au moins en quatre points, par lesquels devra passer la cubique $\varphi_3 = 0$: ce qui est impossible, φ_3 ne pouvant être divisible par $\alpha x + \beta y + \gamma$.

Si aucune des quantités λ, μ, ν n'est infinie, alors les identités

$$(a - b)y^2 + \mu Q^2 = \lambda P^2, \qquad (a - c)y^2 + \nu R^2 = \lambda P^2$$

montrent que les droites

$$P = 0, \qquad Q = 0, \qquad R = 0$$

devront coïncider avec la corde des contacts des coniques σ

$$y = 0.$$

Il s'ensuit que l'on aura

$$\varphi_2 = x^2,$$

ou

$$\varphi_2 = y^2,$$

ou

$$\varphi_2 = x - \alpha y^2.$$

Soit

$$\varphi_2 = x - \alpha y^2;$$

si, dans l'identité (9), on suppose que x devienne égal à αy^2, il viendra

$$\varphi_3^2 = -\mathrm{A}abcy^6,$$

ce qui suppose que φ_3 est de la forme

$$\varphi_3 = (x - \beta y^2)y,$$

de telle sorte que φ_4 sera déterminé par l'identité suivante :

$$(x - \beta y^2)^2 y^2 - (x - \alpha y^2)\varphi_4 = (x - ay^2)(x - by^2)(x - cy^2),$$

ou, si l'on rejette à l'infini la droite $y = 0$, par l'identité

$$(xt - \beta)^2 - (xt - \alpha)\varphi_4 = (xt - a)(xt - b)(xt - c),$$

ce qui donnera

$$\varphi_4 = m(xt)^2 + n(xt) + p;$$

la surface du quatrième degré correspondant à ces expressions de φ_2, φ_3, φ_4 sera donc

$$z^2(xt - \alpha) + 2z(xt - \beta) + m(xt)^2 + n(xt) + p = 0;$$

on obtiendra ainsi une transformée homographique d'une surface de révolution.

Il en sera de même, si l'on suppose que α devienne nul, ou égal à l'une des quantités a, b, c.

L'hypothèse

$$\varphi_2 = y^2$$

n'est pas admissible, car si, dans l'identité (9), on fait y égal à zéro, il viendrait

$$\varphi_3^2 = \mathrm{A}x^3.$$

Reste donc le cas où l'on aurait

$$\varphi_2 = x^2,$$

la conique φ_2 étant alors une tangente commune aux coniques σ, comptée deux fois.

Si l'on échange entre elles la droite de l'infini et la droite $y = 0$, l'identité (9) deviendra

$$\varphi_3^2 - \varphi_2\varphi_4 = \mathrm{A}(xy - a)(xy - b)(xy - c), \tag{10}$$

ou encore

$$(11)\qquad \varphi_3^2 - \varphi_2\varphi_4 = A(xy)^3 + B(xy)^2 + C(xy) + D,$$

l'équation

$$A\mu^3 + B\mu^2 + C\mu + D = 0$$

ayant ses racines toutes distinctes.

Le polynome φ_2 étant égal à x^2, on voit que les deux termes

$$Cxy,\quad D,$$

devront provenir de φ_3. Le second membre de (11) peut s'écrire

$$\left(\frac{C}{2\sqrt{D}}xy + \sqrt{D}\right)^2 - \frac{C^2}{4D}x^2y^2 + Ax^3y^3 + Bx^2y^2,$$

ou bien

$$\left(\frac{C}{2\sqrt{D}}xy + \sqrt{D}\right)^2 - x^2\left[\frac{C^2}{4D}y^2 - Axy^3 - By^2\right],$$

et, si nous posons

$$\sqrt{D} = v,\qquad \frac{C}{2\sqrt{D}} = m,$$
$$m^2 - B = 4n,\qquad A = -4u,$$

l'identité (11) deviendra

$$\varphi_3^2 - \varphi_2\varphi_4 = (mxy + v)^2 - 4x^2(ny^2 + uxy^3).$$

On pourra alors déterminer les fonctions φ par les équations suivantes :

$$\varphi_3 = mxy + v,\qquad \varphi_2 = x^2,\qquad \varphi_4 = ny^2 + uxy^3,$$

ce qui donnera la surface

$$(\mathrm{IV})\qquad z^2x^2 + z(mxy + v) + ny^2 + uxy^3 = 0.$$

Remarque. — On a identiquement

$$\begin{aligned}&[mxy + v + 2x^2(\alpha x + \beta y + \gamma)]^2\\ &\quad - 4x^2[ny^2 + uxy^3 + x^2(\alpha x + \beta y + \gamma)^2 + (\alpha x + \beta y + \gamma)(mxy + v)]\\ &= (mxy + v)^2 - 4x^2[ny^2 + uxy^3],\end{aligned}$$

mais on remarquera que la surface

$$\begin{aligned}&z^2x^2 + z[mxy + v + 2x^2(\alpha x + \beta y + \gamma)]\\ &\quad + ny^2 + uxy^3 + x^2(\alpha x + \beta y + \gamma)^2 + (\alpha x + \beta y + \gamma)(mxy + v) = 0,\end{aligned}$$

est une transformée homographique de la surface (IV). Il suffit, pour le voir, de poser

$$z = Z + \alpha x + \beta y + \gamma.$$

6. Nous avons enfin à chercher les surfaces du quatrième degré, pour lesquelles la *courbe de passage* se décompose en trois coniques surosculatrices deux à deux en un même point. Il faudra alors satisfaire à l'identité

$$(12) \qquad \varphi_3^2 - \varphi_2\varphi_4 = (ax + y^2 + \mu_1)(ax + y^2 + \mu_2)(ax + y^2 + \mu_3) = \sigma_2\sigma_2'\sigma_2''.$$

La conique $\varphi_2 = 0$ sera une conique véritable surosculatrice à chacune des coniques σ; ou bien $\varphi_2 = 0$ représentera la droite de l'infini comptée deux fois. On aura donc

$$\varphi_2 = ax + y^2 + \alpha,$$

ou

$$\varphi_2 = \text{const.}$$

Dans le premier cas, φ_3 et φ_4 auront pour expressions

$$\varphi_3 = ax + y^2 + \beta, \qquad \varphi_4 = (ax + y^2)^2 + m(ax + y^2) + n,$$

et la surface du quatrième degré correspondante aura pour équation

$$z^2(ax + y^2 + \alpha) + 2z(ax + y^2 + \beta) + (ax + y^2)^2 + m(ax + y^2) + n = 0,$$

ce qui peut s'écrire sous la forme

$$(ax + y^2 + hz^2 + kz + l)^2 - g_4(z) = 0;$$

on trouve ainsi une transformée homographique de la surface (III).

Supposons, maintenant, que l'on ait

$$\varphi_2 = \text{const.}$$

Si l'on fait la transformation qui consiste à changer x en $x + h$, les équations des coniques σ deviendront

$$ax + y^2 + \mu_1 + ah = 0, \qquad ax + y^2 + \mu_2 + ah = 0, \qquad ax + y^2 + \mu_3 + ah = 0,$$

ou, en posant

$$\mu + ah = m,$$

$$ax + y^2 + m_1 = 0, \qquad ax + y^2 + m_2 = 0, \qquad ax + y^2 + m_3 = 0;$$

on peut supposer que l'on a choisi h de façon à avoir

$$m_1 + m_2 + m_3 = 0,$$

et, dans ce cas, l'identité (12) pourra s'écrire

$$(13)\qquad \varphi_3^2 - \varphi_2\varphi_4 = (ax+y^2)^3 + p(ax+y^2) + r.$$

Le second membre de cette identité deviendra, si l'on introduit la variable d'homogénéité t,

$$(axt+y^2)^3 + p(axt+y^2)t^4 + rt^6,$$

c'est-à-dire, en développant,

$$(14)\qquad a^3x^3t^3 + y^6 + 3axty^4 + 3a^2x^2t^2y^2 + paxt^3 + py^2t^4 + rt^6;$$

φ_2 étant égal à t^2, on voit que les termes

$$y^6,\quad 3axty^4$$

devront provenir de φ_3. Multiplions l'expression (14) par 4, ajoutons et retranchons la quantité

$$9a^2x^2t^2y^2;$$

(14) sera alors de la forme

$$[2y^3+3axyt]^2 + 4t^2[a^2x^2t + \tfrac{3}{4}a^2x^2y^2 + paxt^3 + py^2t^2 + rt^4],$$

et l'on pourra prendre, pour les fonctions φ,

$$\varphi_2 = t^2,\qquad \varphi_3 = 2y^3 + 3axyt,$$
$$\varphi_4 = -a^3x^3t - \tfrac{3}{4}a^2x^2y^2 - paxt^3 - py^2t^2 - rt^4,$$

et, en faisant $t=0$, il viendra la surface du quatrième degré

$$(\mathrm{V})\qquad z^2 + z(2y^3+3axy) - a^3x^3 - \tfrac{3}{4}a^2x^2y^2 - pax - py^2 - r = 0.$$

Remarque. — On pourrait encore prendre pour φ_3

$$\varphi_3 = 2y^3 + 3axyt + 2t^2(\alpha x + \beta y + \gamma t),$$

ce qui donnerait une nouvelle expression pour φ_4; mais les surfaces auxquelles on arriverait ainsi seraient des transformées homographiques des surfaces (V).

7. Dans son Mémoire déjà cité, sur les surfaces du quatrième degré dont le genre géométrique p_g est nul, M. de Franchis a obtenu, par une autre voie, les surfaces (I), (II), (III), (IV), (V), et il en a fait ensuite l'étude géométrique.

Nous pouvons remarquer, au sujet de ces surfaces, qu'elles sont toutes représentables sur un cône cubique; de plus, ce sont les seules surfaces du quatrième degré admettant des intégrales de différentielles totales de première espèce, et il

s'ensuit qu'une surface du quatrième degré ne peut avoir deux intégrales de différentielles totales de première espèce qui ne soient pas fonction l'une de l'autre [1].

Si l'on désigne par π le genre d'une section plane d'une surface conique et par p_n le genre numérique de cette surface, on a

$$p_n = -\pi,$$

et, par conséquent, pour les surfaces considérées, on pourra écrire les relations suivantes :

$$p_1 - 1 = 2, \qquad p_g = 0, \qquad p_n = -1.$$

CHAPITRE III.

Connexion linéaire des surfaces $z^2 = f_8(x, y)$.

Étant donnée une surface du huitième degré de la forme

$$z^2 = f_8(x, y),$$

l'ordre de connexion linéaire d'une telle surface sera égal à un, si la courbe

$$f_8(x, y) = 0$$

est irréductible. Nous allons examiner les différents cas de décomposition de cette courbe.

1. *f_8 se décompose en deux courbes du quatrième degré.* — Soit la surface

$$z^2 = \sigma_4 \sigma'_4, \tag{1}$$

et supposons que l'origine O soit un point de rebroussement pour la quartique $\sigma_4 = 0$ et un point simple pour la quartique $\sigma'_4 = 0$, la courbe σ'_4 étant, de plus, tangente en ce point à σ_4.

Si l'origine est un point de rebroussement de première espèce sur σ_4, nous aurons la surface

$$z^2 = (x^2 + \ldots + y^2 + \ldots)(x + hy^2 + \ldots),$$

[1] E. Picard, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, t. I, p. 131.

et la transformation

$$(U) \qquad x = XY, \qquad y = Y$$

nous conduira à une autre surface

$$z^2 = Y(Y + \ldots)(X + hY + \ldots),$$

qui n'admet pas de cycles finis.

Si l'origine est un point de rebroussement de seconde espèce, l'équation (1) pourra s'écrire

$$z^2 = (x^2 + \ldots + 2\beta xy^2 + \ldots + y_4)(x + hy^2 + \ldots).$$

Soit d'abord,

$$h^2 - 2h\beta + 1 = 0;$$

on effectuera alors la transformation

$$(V) \qquad x = XY^2, \qquad y = Y,$$

et nous obtiendrons la surface

$$z^2 = (\sigma_4)(\sigma'_4),$$

en désignant par le symbole (σ_4) la courbe transformée de σ_4; $(\sigma_4) = 0$ rencontrera, en général, la droite $y = 0$ en deux points simples m, n, ce dernier point étant aussi un point simple de (σ'_4). Il pourra encore arriver que m vienne à coïncider avec n et alors la droite $y = 0$ deviendra tangente à (σ_4) en n ou bien (σ_4) admettra un point double en n. Si ce point double est un point de rebroussement pour (σ_4), nous allons voir que ce sera un point de rebroussement de première espèce.

En effet, l'équation développée de σ_4 peut s'écrire

$$\sigma_4 = x^2 + 2\alpha x^2 y + 2\beta xy^2 + ax^4 + bx^3 y + cx^2 y^2 + dxy^3 + y^4 = 0,$$

si l'on fait disparaître le terme en x^3 par un choix convenable de l'axe des x.

La transformation (V) nous fera passer à la courbe (σ_4)

$$(\sigma_4) = x^2 + 2\alpha x^2 y + 2\beta x + ax^4 y^4 + bx^3 y^3 + cx^2 y^2 + dxy + 1 = 0.$$

Si l'expression

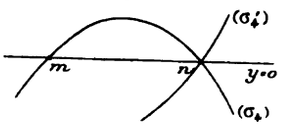
$$x^2 + 2\beta x + 1$$

n'est pas un carré parfait, (σ_4) rencontrera la droite $y = 0$ en deux points simples m et n (*fig.* 12). Dans le cas contraire, nous pouvons prendre $\beta = -1$ et, si nous transportons l'origine au point $(x = 1, y = 0)$, il viendra

$$(\sigma_4) = (2\alpha + d)y + x^2 + (4\alpha + d)xy + cy^2 + 2\alpha x^2 y + by^3 + 2cxy^2 + \ldots = 0.$$

Si $2\alpha + d \neq 0$, le point m est venu coïncider avec n, et la droite $y = 0$ est tangente à (σ_4) en n. Si $2\alpha + d = 0$, le point n est un point double sur (σ_4). Le

Fig. 12.



point double sera à tangentes confondues si l'expression

$$x^2 + 2\alpha xy + cy^2$$

est un carré parfait; alors $c = \alpha^2$ et (σ_4) devient

$$(\sigma^4) = (x + \alpha y)^2 + 2\alpha x^2 y + by^3 + 2\alpha^2 xy^2 + \ldots = 0.$$

Coupons cette courbe par la droite

$$x + \alpha y = 0;$$

pour cela, remplaçons x par $-\alpha y$ dans l'équation de (σ_4), on obtiendra

$$by^3 + \ldots = 0,$$

les termes non écrits étant de degré supérieur à trois. Si la tangente de rebroussement en n rencontre (σ_4) en quatre points confondus en n, on devra avoir

$$b = 0,$$

mais alors la courbe σ_4 aurait pour équation

$$(x - y^2 + \alpha xy)^2 + ax^4 = 0,$$

et, par conséquent, ne serait pas indécomposable. Il s'ensuit que si le point n considéré est un point de rebroussement sur (σ_4), ce ne peut être qu'un point de rebroussement de première espèce.

Supposons, en second lieu, que l'on ait

$$h^2 - 2\beta h + 1 \neq 0,$$

inégalité qui sera certainement vérifiée si $h = 0$, c'est-à-dire si l'origine est un point d'inflexion pour σ_4'. Dans le cas actuel, quatre seulement des points d'intersection de σ_4 et σ_4' seront confondus au point O. Les deux quartiques se rencontreront donc, au moins, en un autre point O_1. Si ce point est un point double pour les deux courbes, on transportera l'origine en O_1, on rejettera à l'infini la tangente

de rebroussement en O, et l'on prendra pour axe des x la droite OO_1; après quoi on effectuera la transformation

$$(W) \qquad x = \frac{X}{Y^2}, \quad y = \frac{1}{Y},$$

qui donnera une surface du sixième degré déjà étudiée

$$z^2 = f_6(x, y).$$

Si le point O_1 est double sur σ_4 seulement, ce ne sera pas pour cette courbe un point de rebroussement de seconde espèce.

Enfin, si le point O_1 est un point de rebroussement de seconde espèce sur σ'_4 et un point simple sur σ_4 et que, de plus, les deux courbes se rencontrent, en ce point, en quatre points seulement confondus avec O_1, les deux quartiques devront alors se couper en un troisième point O_2; d'ailleurs, ce point O_2 ne pourra être un point de rebroussement de seconde espèce, ni pour σ_4, ni pour σ'_4.

Nous voyons ainsi que, si les courbes σ_4, σ'_4 se coupent en un point O qui est un point double pour l'une de ces courbes et un point simple pour l'autre, la surface (1) correspondante n'aura pas de cycles finis.

Il en sera de même si, en un point O, les deux quartiques σ_4, σ'_4 admettent, l'une un point double à tangentes confondues, l'autre un point double avec deux branches distinctes, l'une de ces branches étant, au point O, tangente à σ_4. Dès lors, on pourra poser

$$\sigma_4 = x^2 + \ldots,$$
$$\sigma'_4 = x(x+y) + \ldots,$$

les termes non écrits étant de degré supérieur au second.

Pour voir que, dans cette hypothèse, tous les cycles de la surface (1) se réduiront à des cycles nuls, on effectuera une transformation (U) si le terme en y^3 entre dans σ_4 ou si ce terme ne se trouve ni dans σ_4, ni dans σ'_4; on fera une transformation (V) si le terme en y^3 existe dans σ'_4 et non dans σ_4.

Nous examinerons encore le cas où σ_4 et σ'_4 auraient un point de rebroussement en un point O, les deux tangentes de rebroussement en ce point étant confondues.

Si le point O est un point de rebroussement de première espèce pour les deux quartiques, ou pour l'une d'elles seulement, on aura recours à une transformation (U).

Si le point O est un point de rebroussement de seconde espèce pour σ_4 et σ'_4, on rejettera à l'infini la tangente commune de rebroussement en O; on prendra pour origine l'un des points de contact O_1 de σ_4 avec une tangente à cette courbe menée du point O. L'axe des x étant la droite OO_1, les équations des deux quar-

tiques seront alors

$$\sigma_4 = hy^4 + y^2(ax + by) + x^2 + mxy + ny^2 + y = 0,$$
$$\sigma'_4 = h'y^4 + y^2(a'x + b'y) + x^2 + m'xy + n'y^2 + \alpha'x + \beta'y + \gamma' = 0.$$

Effectuons sur ces deux courbes une transformation (W), il viendra deux autres courbes (σ_4), (σ'_4)

$$(\sigma_4) = y^2 + x^2 + mxy + ny^2 + ax + by + h = 0,$$
$$(\sigma'_4) = \gamma' y^4 + (\alpha' x + \beta' y)y^2 + x^2 + m'xy + n'y^2 + a'x + b'y + h' = 0,$$

et l'on sera ramené à considérer la surface

$$(1') \qquad z^2 = (\sigma_4)(\sigma'_4).$$

Il est aisé de voir que, parmi les points d'intersection des courbes (σ_4) et (σ'_4), il y en aura quatre seulement confondus au point à l'infini sur Ox. Les deux courbes (σ_4), (σ'_4) se couperont donc, au moins, en un autre point O_2 qui devra être un point double sur l'une de ces courbes si l'on veut que la surface (1) puisse admettre des cycles qui ne soient pas tous nuls. D'ailleurs, si l'on place l'origine au point O_2, l'axe O_2x étant la droite OO_2, et qu'on transforme la surface (1') par les formules (W), on obtiendra une surface du sixième degré

$$z^2 = f_6(x, y).$$

Il pourrait arriver que, du point O, on ne pût mener à σ_4 et σ'_4 aucune tangente distincte de la tangente de rebroussement. Soit, alors,

$$\sigma_4 = hy^4 + y^2(ax + by) + x^2 + mxy + ny^2 + \alpha x + \beta y;$$

on aura, par hypothèse,

$$(ay^2 + my + \alpha)^2 - 4(hy^4 + by^3 + ny^2 + \beta y) = \text{const.},$$

et il s'ensuit que l'équation de σ_4 pourra s'écrire

$$\sigma_4 = (\sqrt{h}y^2 + x + \sqrt{n}y)^2 + \alpha x + \beta y = 0;$$

de même, pour σ'_4, on aura

$$\sigma'_4 = (\sqrt{h'}y^2 + x + \sqrt{n'}y)^2 + \alpha' x + \beta' y + \gamma' = 0,$$

et, si l'on pose

$$\sqrt{h}y^2 + x + \sqrt{n}y = X, \qquad y = Y,$$

à la surface (1) correspondra birationnellement une surface

$$z^2 = f_6(x, y).$$

Les remarques qui viennent d'être faites sur la surface (1) nous permettent d'affirmer qu'une telle surface ne possède aucun cycle fini.

2. *f_8 se décompose en une courbe du sixième degré et deux droites.* — Nous allons considérer la surface

$$z^2 = \sigma_6 \sigma_1 \sigma'_1 \tag{2}$$

et examiner, d'abord, le cas où les droites σ_1, σ'_1 ne se coupent pas sur la courbe $\sigma_6 = 0$.

Supposons que la droite σ_1 soit tangente à σ_6 en un point O, qui est pour cette courbe un point de rebroussement de seconde espèce. Si la droite σ_1 rencontre σ_6 en quatre points ou en cinq points confondus avec le point O, σ_1 devra encore couper σ_6 en un point simple, ou en un point double auquel elle ne sera pas tangente à la courbe σ_6; et, par conséquent, la surface n'admettra pas de cycles finis.

Mais il pourra arriver que la droite σ_1 soit tangente à σ_6 en un point de rebroussement O, et ne rencontre cette courbe qu'au point O, et que, de même, la droite σ'_1 soit tangente à σ_6 en un autre point de rebroussement O′, et ne rencontre la courbe qu'en ce point. Rejetons σ'_1 à l'infini et prenons OO′ pour axe des x et σ_1 pour axe des y. L'équation (2) pourra s'écrire

$$z^2 = x\sigma_6;$$

faisons la transformation simplement rationnelle

$$x = X^2, \qquad y = Y;$$

il viendra une surface

$$z^2 = f_n(X, Y),$$

f_n désignant un polynome en X, Y qui sera irréductible, si toutefois l'équation de la courbe σ_6 ne peut pas être mise sous la forme

$$[\varphi(x, y)]^2 - x[\psi(x, y)]^2 = 0;$$

mais alors, nous aurons

$$\varphi(x, y) = y^3 + \ldots,$$

les termes non écrits étant de degré inférieur au troisième. D'ailleurs, $\psi(x, y)$ devra être du premier degré en x. Il s'ensuit que la transformation $x = X^2$ nous fera, dans ce cas, passer de la surface (2) à une surface déjà rencontrée

$$z^2 = \sigma_4 \sigma'_4.$$

On raisonnera exactement de la même façon dans l'hypothèse où les droites σ_1, σ'_1 se coupent en un point double de σ_6 et sont, de plus, tangentes : la première en un point O, la seconde en un point O′ de σ_6, ces deux points O et O′ étant sur la courbe σ_6 des points de rebroussement de seconde espèce.

Supposons encore que σ_1, σ'_1 se coupent en un point triple O de σ_6. Si l'une des droites σ n'est pas tangente en O à σ_6, la surface (2) n'aura certainement pas de cycles finis (Chap. I, n° 5).

Chacune des droites σ devant être tangente à σ_6 au point triple considéré, l'une de ces droites sera une tangente simple pour cette courbe, nous la prendrons pour axe des y. Nous pourrons écrire ainsi l'équation (2)

$$z^2 = xy[xy(ax + by) + \ldots], \qquad b \neq 0$$

et, après une transformation (U), il viendra la surface

$$z^2 = xy(bx + \ldots)$$

dont l'ordre de connexion linéaire est égal à un.

3. *f_8 se décompose en une courbe du sixième degré et une conique.* — Si la courbe du sixième degré σ_6 ne rencontre la conique σ_2 qu'en un point ω, nous pourrons poser

$$\sigma_2 = x - y^2, \qquad \sigma_6 = (x - y^2)\,\varphi_4(x, y) + k$$

et il suffira d'examiner le cas où le point ω serait un point de rebroussement de seconde espèce pour σ_6, la tangente de rebroussement étant la tangente à σ_2 en ce point, et aussi le cas où σ_6 aurait un point multiple d'ordre quatre en ω. D'ailleurs, il n'y a pas non plus alors de difficulté, car la transformation

$$x - y^2 = X, \qquad y = Y$$

nous conduira de la surface

$$z^2 = \sigma_6 \sigma_2 \tag{3}$$

à une autre surface déjà étudiée.

Si les courbes σ_6 et σ_2 se rencontrent en deux points ω et O, on placera l'origine au point O, on prendra pour axe des x la droite Oω et pour droite de l'infini la tangente en ω à σ_2, et l'on effectuera une transformation (W).

4. *f_8 se décompose en une courbe du cinquième degré et trois droites.* — La surface

$$z^2 = \sigma_5 \sigma_1 \sigma'_1 \sigma''_1 \tag{4}$$

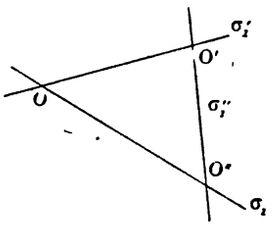
étant donnée, supposons que les droites σ forment un triangle, et que deux des sommets O′, O″ de ce triangle (*fig.* 13) ne se trouvent pas sur la courbe σ_5. Nous aurons alors

$$(\sigma_1, \sigma_1'') = 0, \qquad (\sigma_1', \sigma_1'') = 0;$$

d'ailleurs, la condition suivante

$$(\sigma_5, \sigma_1) + (\sigma_1', \sigma_1'') = 0,$$

Fig. 13.



qui est toujours vérifiée, nous donnera, en outre,

$$(\sigma_5, \sigma_1) = 0.$$

Si la courbe σ_5 admet un point simple en un sommet O″ du triangle des droites σ, il viendra

$$(\sigma_5, \sigma_1) = 0, \qquad (\sigma_1, \sigma_1'') = 0$$

et, par conséquent, aussi

$$(\sigma_1', \sigma_1'') = 0.$$

Pour que la surface (4) puisse avoir des cycles finis, il faudra donc supposer que, la courbe σ_5 passant en deux sommets au moins, O′, O″, du triangle considéré, ces sommets sont pour σ_5 des points doubles ou des points multiples d'un ordre plus élevé. On rejettera, alors, σ_1'' à l'infini, et prenant pour axes les droites σ_1, σ_1', on fera une inversion

$$x = \frac{1}{X}, \qquad y = \frac{1}{Y}$$

et l'on sera ramené à une surface, sur laquelle tous les cycles se réduisent à des cycles nuls.

Si les droites σ sont concourantes et si la courbe σ_5 ne passe pas par leur point de concours, tous les cycles de la surface se réduiront encore à zéro.

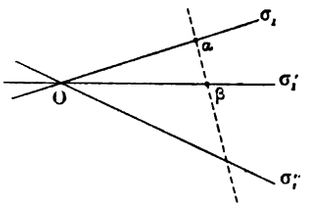
Si le point O (*fig.* 14) est un point simple sur σ_5, la tangente en ce point à la courbe étant distincte de σ_1 et σ_1', il s'ensuivra que σ_5 rencontrera σ_1, au moins en un autre point α, et σ_1', au moins en un autre point β. Ces deux points α, β ne

sauraient être simples sur σ_5, car autrement nous pourrions écrire

$$(\sigma_5, \sigma_1) = 0, \qquad (\sigma_5, \sigma'_1) = 0, \qquad (\sigma'_1, \sigma''_1) = 0.$$

Admettons que α soit un point double sur σ_5, et β un point simple; $\alpha\beta$ étant la

Fig. 14.



droite de l'infini, et les axes coïncidant avec σ_1, σ'_1, l'inversion

$$x = \frac{1}{X}, \qquad y = \frac{1}{Y}$$

transforme la surface

$$z^2 = xy(x + ay)\sigma_5$$

en une surface

$$z^2 = Y(Y + aX)\sigma_6.$$

Supposons maintenant que le point O soit un point double sur la courbe σ_5. Si deux droites σ_1, σ'_1 ne sont pas tangentes à σ_5 au point O, on raisonnera comme dans le cas précédent. Si, au contraire, σ_1, σ'_1 sont les tangentes au point double O de σ_5, l'équation de la surface (4) pourra se mettre sous la forme

$$z^2 = y(ax + by)(a'x + b'y)[(ax + by)(a'x + b'y) + \ldots],$$

ce qui nous donnera, après une transformation (V), la surface

$$z^2 = y(ax + b)(a'x + b')[(ax + b)(a'x + b) + y(\ldots)]$$

sur laquelle un cycle linéaire quelconque sera équivalent à zéro.

Enfin, si la courbe σ_5 a un point triple en O, la surface (4) sera unicursale.

5. *f_8 se décompose en une quartique, une cubique et une droite.* — La condition

$$(\sigma_3, \sigma_1) = 0$$

étant toujours vérifiée, tous les cycles de la surface

$$z^2 = \sigma_4 \sigma_3 \sigma_1 \tag{5}$$

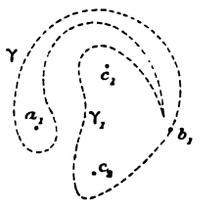
seront réductibles à un seul d'entre eux, qui, lui-même, nous allons le voir, sera réductible à zéro.

Supposons que la quartique σ_4 coupe la droite σ_1 en un point simple O, et ne lui soit pas tangente en ce point, si la cubique σ_3 ne passe pas en O, ou si elle y admet un point simple, ou un point double, σ_4 étant tangente à σ_3 en ce point double, il est évident que la surface (5) n'aura pas de cycles finis.

Si la cubique σ_3 ayant un point double en O, σ_4 n'est pas tangente en ce point à σ_3, l'origine étant transportée en O, nous aurons, pour y voisin de zéro, quatre racines infiniment petites : l'une a_1 donnée par $\sigma_1 = 0$, l'autre b_1 par $\sigma_4 = 0$ et enfin deux autres c_1 et c_2 données par $\sigma_3 = 0$.

Si l'on considère un cycle C entourant b_1 et une racine non infiniment petite,

Fig. 15.



ce cycle, après une révolution de y, s'accroîtra de deux fois la somme de deux cycles γ et γ_1 (*fig.* 15), de telle sorte que l'on pourra écrire

$$(\sigma_4, \sigma_1) = 0.$$

Considérons le cas où σ_4 est tangente à σ_1 en un point O, et rencontre encore cette droite en un point O′, qui est double sur la quartique ; σ_3 devra être tangente en O à σ_1 et passer en O′.

Si les courbes σ_4, σ_3 se coupent en dehors de σ_1 en un point O″, et que ce point soit double sur les deux courbes, on fera une inversion

$$x = \frac{1}{X}, \qquad y = \frac{1}{Y},$$

OO′, OO″ étant les axes et O′O″ la droite de l'infini. Si le point O″ est un point de rebroussement de seconde espèce pour σ_4, σ_3 étant tangente à la quartique en ce point, on fera uue transformation (W), après avoir transporté l'origine au point O et avoir pris, pour axe des x, la droite O′O″. On sera conduit ainsi à des surfaces de la forme

$$z^2 = f_6(x, y).$$

Il reste à supposer que σ_3 et σ_4 ne se coupent qu'aux points O et O′. Si

la cubique σ_3 rencontre σ_4 en plus de deux points confondus avec le point O, l'équation (5) pourra s'écrire

$$z^2 = x[x - \alpha y^2 + \ldots][x - \alpha y^2 + \ldots] = x\sigma_3\sigma_4,$$

ce qui deviendra, après une transformation (V),

$$z^2 = x[x - \alpha + y(\ldots)][x - \alpha + y(\ldots)].$$

Si la cubique σ_3 est tangente en O′ à σ_4, et rencontre cette courbe en plus de six points confondus avec O′; si, de plus, le point O′ est pour la quartique un point de rebroussement de seconde espèce, on fera encore une transformation (V), sur la surface (5),

$$\text{(V)} \qquad x = XY^2, \qquad y = Y,$$

l'origine ayant été placée en O′, l'axe des x coïncidant avec σ_1 et l'axe des y avec la tangente de rebroussement. Il pourra arriver que la courbe transformée (σ_4) admette un point double ou un point de rebroussement de première espèce en un point O_1 de $y = 0$. Mais, alors, la courbe (σ_3) qui passera en ce point y sera tangente à (σ_4). L'origine étant supposée en O_1, il suffira d'effectuer une transformation (U) pour passer de la surface

$$z^2 = y(\sigma_4)(\sigma_3)$$

à une surface n'ayant aucun cycle fini.

Soit encore le cas où σ_4 rencontre la droite σ_1 en deux points O et O′ qui sont doubles pour la quartique; σ_3 devra passer en O et O′. Si l'on rejette σ_1 à l'infini et qu'on prenne une origine quelconque, les axes passant d'ailleurs, l'un en O, l'autre en O′, on sera, après la transformation

$$x = \frac{1}{X}, \qquad y = \frac{1}{Y},$$

ramené à considérer une surface de la forme

$$z^2 = \sigma_4\sigma'_4.$$

Enfin, nous supposerons que σ_4 rencontre σ_1 en un point triple O; σ_3 devra passer en ce point, de telle sorte qu'on pourra écrire, en rejetant σ_1 à l'infini,

$$\sigma_4 = \varphi_3(y)x + \varphi_4(y),$$
$$\sigma_3 = \psi_1(y)x^2 + \psi_2(y)x + \psi_3(y);$$

si les courbes σ_4 et σ_3 ne se coupent pas à distance finie, le résultat de l'élimina-

tion de x entre les équations

$$\sigma_4 = 0, \qquad \sigma_3 = 0$$

se réduira à une constante k. Il viendra ainsi

$$\psi_1(y)[\varphi_4(y)]^2 - \psi_2(y)\varphi_3(y)\varphi_4(y) + \psi_3(y)[\varphi_3(y)]^2 = k.$$

Dès lors, si l'on pose

$$\varphi_3(y)x + \varphi_4(y) = X, \qquad y = Y,$$

et que l'on tienne compte de la condition précédente, on sera conduit à une surface de la forme

$$z^2 = \sigma_6 \sigma_1 \sigma'.$$

6. *f_8 se décompose en une cubique, deux coniques et une droite.* — Soit la surface

$$z^2 = \sigma_3 \sigma_2 \sigma'_2 \sigma_1, \tag{6}$$

et examinons le cas où les coniques σ_2, σ'_2 se coupent en quatre points distincts. Si la droite σ_1 ne passe en aucun des points communs à σ_2, σ'_2, la surface (6) n'aura pas de cycles finis.

La condition

$$(\sigma_3, \sigma_1) = 0$$

sera, d'abord, toujours vérifiée. On peut écrire encore

$$(\sigma_2, \sigma'_2) = 0,$$

et, enfin, la droite σ_1 rencontrera chacune des deux coniques σ, au moins en un point : cela donnera deux points α, β. La cubique σ_3 ne pourra avoir un point double en chacun de ces points, ni être tangente en α et β à σ_1. D'où une troisième condition

$$(\sigma_2, \sigma_1) = 0 \qquad \text{ou} \qquad (\sigma'_2, \sigma_1) = 0.$$

Il en sera de même si la droite σ_1 rencontre les coniques σ_2, σ'_2 en un de leurs points communs a et les coupe en deux autres points α, β.

Supposons que la droite σ_1 passant toujours au point a soit tangente en ce point à σ'_2 et coupe σ_2 en un autre point α (*fig.* 6). Si la cubique σ_3 ne passe pas en a, nous aurons

$$(\sigma_2, \sigma_1) = 0, \qquad (\sigma_2, \sigma'_2) = 0$$

et aussi

$$(\sigma_3, \sigma_1) = 0.$$

D'ailleurs, si la cubique σ_3 passe en a et admet un point double en α, tous les

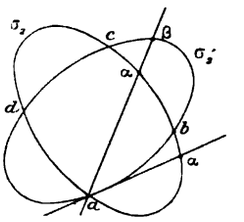
cycles se réduiront encore à zéro; car, la droite σ_1 n'étant pas tangente en α à σ_3, il viendra

$$(\sigma_2, \sigma_1) = 0$$

avec les deux autres conditions

$$(\sigma_2, \sigma'_2) = 0, \qquad (\sigma_3, \sigma_1) = 0.$$

Fig. 16.



On raisonnera d'une façon tout à fait analogue dans le cas où les coniques σ_2, σ'_2 ne se couperaient pas en quatre points distincts, et l'on sera toujours conduit au même résultat.

On verra également, sans aucune difficulté, que pour une surface de la forme

$$(6') \qquad z^2 = \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma'_1 \sigma''_1$$

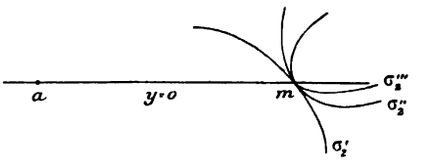
l'ordre de connexion linéaire est encore égal à un.

7. *f_8 se décompose en quatre coniques.* — Nous allons d'abord faire une remarque au sujet d'une surface ayant pour équation

$$(7) \qquad z^2 = \sigma_2 \sigma'_2 \sigma''_2 \sigma'''_2.$$

Supposons qu'en un point m (*fig.* 17) de la conique σ'_2, par exemple, les coniques σ''_2, σ'''_2 soient tangentes entre elles et tangentes à σ'_2; le point m ne se trou-

Fig. 17.



vant pas sur σ_2. Nous prendrons pour origine un point a commun à σ_2, σ_2 et pour axe des x la droite am, la tangente en m, à σ'_2, étant la droite de l'infini. Nous

effectuerons une transformation (W)

$$(\mathrm{W}) \qquad x = \frac{X}{Y^2}, \qquad y = \frac{1}{Y},$$

et nous obtiendrons, alors, une surface pouvant se ramener à l'une des trois formes suivantes

$$z^2 = \sigma_3 \sigma_2 \sigma'_2 \sigma_1,$$
$$z^2 = \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma'_1 \sigma''_1,$$
$$z^2 = \sigma_3 \sigma_1 \sigma'_1 \sigma''_1;$$

la surface (7), dans l'hypothèse qui a été faite, n'aura donc pas de cycles finis. Il s'ensuit que, si les coniques σ''_2, σ'''_2 rencontrent σ_2, ou σ'_2, en dehors des points communs à ces dernières coniques, on n'aura pas à considérer le cas où les coniques σ''_2, σ'''_2 seraient tangentes à σ_2 ou à σ'_2 en un même point m.

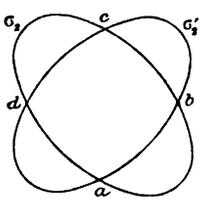
Cela étant, soit, d'abord, le cas où les coniques σ_2, σ'_2 se coupent en quatre points distincts a, b, c, d.

Si les coniques σ''_2, σ'''_2 rencontrent l'une des coniques σ_2, σ'_2 en dehors des points a, b, c, d (*fig.* 18), il viendra, en vertu de la remarque précédente,

$$(\sigma''_2, \sigma_2) = 0 \qquad \text{ou} \qquad (\sigma''_2, \sigma'_2) = 0,$$
$$(\sigma'''_2, \sigma_2) = 0 \qquad \text{ou} \qquad (\sigma'''_2, \sigma'_2) = 0.$$

D'ailleurs, il est bien évident que σ''_2, σ'''_2 ne passeront pas, à la fois, par tous les

Fig. 18.



points a, b, c, d, et, par conséquent, une troisième condition viendra s'ajouter aux deux premières, savoir :

$$(\sigma_2, \sigma'_2) = 0,$$

tous les cycles de la surface seront réductibles à zéro.

Nous devons donc supposer que σ''_2, par exemple, ne rencontre pas σ_2, σ'_2 en dehors des points communs à ces deux coniques. On peut tirer de là que σ''_2 passera en deux, au moins, des points a, b, c, d; soient c et d ces deux points.

Si les points c, d ne se trouvent pas sur σ'''_2, nous pourrons écrire

$$(\sigma_2, \sigma'_2) = 0, \qquad (\sigma'_2, \sigma''_2) = 0.$$

La conique σ_2''' pourra passer en l'un des points a, b, au point a, par exemple. Si ce point a n'est pas sur σ_2'', on aura

$$(\sigma_2''', \sigma_2) = 0;$$

cette condition subsistera si, toutes les coniques σ passant au point a, l'une d'elles n'est pas tangente à l'une des trois autres, puisque la condition

$$(\sigma_2', \sigma_2'') + (\sigma_2''', \sigma_2) = 0,$$

qui est alors vérifiée, se réduit, dans le cas actuel, à

$$(\sigma_2''', \sigma_2) = 0.$$

On pourra encore écrire cette équation si, le point a étant toujours commun aux quatre coniques σ, σ_2 est tangent en ce point à σ_2'', et σ_2' à σ_2''', comme on le voit, en faisant une transformation (V), d'origine a.

Enfin, si la conique σ_2''' rencontre σ_2 ou σ_2' en dehors des points a, b, c, d, l'une, au moins, des deux équations

$$(\sigma_2''', \sigma_2) = 0, \qquad (\sigma_2''', \sigma_2') = 0$$

sera certainement satisfaite, et tous les cycles de la surface (7) seront encore des cycles nuls.

En raisonnant de la même façon, on verra que, les points c et d étant communs aux trois coniques σ_2, σ_2', σ_2'', il faudra que σ_2''' passe en ces deux points, si l'on veut que la surface (7) puisse admettre des cycles non tous réductibles à zéro.

Dès lors, si l'on prend pour axes les droites ac, ad, la droite de l'infini étant la droite cd, et, si l'on effectue une inversion,

$$x = \frac{1}{X}, \qquad y = \frac{1}{Y},$$

on obtiendra des surfaces déjà étudiées, et l'on montrera aisément que la surface (7) n'aura des cycles finis que dans le cas où les quatre coniques σ passeront par les points a, b, c, d. Ces coniques appartiendront alors à un même faisceau linéaire. L'équation de la surface (7) pourra être ramenée à la forme

$$z^2 = (\varphi + \alpha\psi)(\varphi + \beta\psi)(\varphi + \gamma\psi)(\varphi + \delta\psi)$$

et sera représentable sur un cylindre du quatrième degré ou sur un cône cubique.

Supposons maintenant que les coniques σ_2, σ_2' soient bitangentes, et soient a, b les deux points de contact.

L'une des coniques σ_2'', σ_2''', σ_2'' par exemple, ne devra pas rencontrer σ_2, σ_2' en dehors des points a, b; σ_2'' sera donc tangente en a, b aux coniques σ_2, σ_2'.

Si la conique σ_2''' ne passe ni en a ni en b, il viendra

$$(\sigma_2''', \sigma_2) = 0, \qquad (\sigma_2''', \sigma_2') = 0, \qquad (\sigma_2''', \sigma_2'') = 0;$$

il faudra donc supposer que l'un au moins des points a, b se trouve sur σ_2'''. Si cette conique passe en a, par exemple, on fera une transformation (W), d'origine a, l'axe des x étant la droite ab, et la droite de l'infini la tangente, en b, à σ_2, σ_2'.

La surface (7) admettra des cycles finis dans le cas seulement où les quatre coniques σ seront tangentes deux à deux en deux mêmes points.

Si les coniques σ_2, σ_2' sont tangentes en un point, ou osculatrices, ou surosculatrices, la conclusion sera toujours la même : on pourra tracer deux cycles non équivalents à zéro sur une surface

$$z^2 = \sigma_2 \sigma_2' \sigma_2'' \sigma_2'''$$

lorsque les coniques σ appartiendront à un même faisceau linéaire. Dans tous les autres cas, l'ordre de connexion linéaire de la surface sera égal à un.

8. *f_8 se décompose en trois coniques et deux droites.* — Si les coniques σ_2', σ_2'' sont tangentes à la droite σ_1' en un point m non situé sur σ_2 et distinct du point ω de rencontre des droites σ_1, σ_1', on verra, comme au numéro précédent, que la surface

$$z^2 = \sigma_2 \sigma_2' \sigma_2'' \sigma_1 \sigma_1' \tag{8}$$

n'aura que des cycles nuls.

Considérons alors le cas particulier suivant : σ_2 coupe les droites σ_1, σ_1' en quatre points distincts.

Si le point ω de rencontre des droites σ_1, σ_1' se trouve sur σ_2' et σ_2'', tous les cycles de la surface (8) correspondante seront réductibles à zéro. En effet, la condition

$$(\sigma_1, \sigma_1') = 0$$

sera toujours vérifiée; ensuite, si, au point ω, σ_2' est tangente à σ_1, et σ_2'' à σ_1', on pourra écrire

$$(\sigma_2', \sigma_1) = 0, \qquad (\sigma_2'', \sigma_1') = 0;$$

de plus, nous aurons aussi

$$(\sigma_2, \sigma_1) = 0.$$

Si maintenant, au point ω, l'une des droites σ n'est tangente à aucune des

coniques σ'_2, σ''_2, il viendra l'équation

$$(\sigma'_2, \sigma''_2) + (\sigma_1, \sigma'_1) = 0,$$

qui, dans le cas actuel, se réduit à

$$(\sigma'_2, \sigma''_2) = 0,$$

on aura encore

$$(\sigma_2, \sigma_1) = 0,$$

et enfin σ'_2 ni σ''_2 ne devront rencontrer σ_2 en dehors des points a, b, c, d, sans quoi il s'ensuivrait une condition de la forme

$$(\sigma_2, \sigma'_2) = 0 \qquad \text{ou} \qquad (\sigma_2, \sigma''_2) = 0;$$

supposons alors que σ'_2 passe aux points c et d. Si l'un de ces deux points ne se trouve pas sur σ''_2, l'équation

$$(\sigma_2, \sigma'_2) = 0$$

sera satisfaite. Reste donc à considérer le cas où σ'_2, σ''_2 passent en c et d; on fera une inversion d'origine a, les axes étant ac et ad, et la droite de l'infini, la droite cd. On montrera ainsi que la surface (8) ne peut admettre aucun cycle fini.

Si aucune des coniques σ'_2, σ''_2 ne passe au point ω, on raisonnera exactement comme au numéro précédent et l'on arrivera à ce résultat, que la surface (8) considérée admettra deux cycles finis lorsque les coniques σ et l'ensemble des droites σ_1, σ'_1, considéré comme une conique, appartiennent à un même faisceau linéaire. Dans tous les autres cas, la surface (8) ne possède que des cycles nuls.

La conclusion sera la même si l'on suppose que l'une des droites σ ou toutes les deux soient tangentes à σ_2.

9. Nous n'envisagerons pas les autres cas de décomposition de la courbe

$$f_8(x, y) = 0;$$

ils peuvent, en effet, être traités aussi simplement que ceux déjà considérés. Nous donnerons seulement le résultat de la discussion complète, qui peut s'énoncer ainsi :

La surface

$$z^2 = \sigma_2 \sigma'_2 \sigma''_2 \sigma'''_2$$

admet deux cycles finis lorsque les coniques

$$\sigma_2 = 0, \qquad \sigma'_2 = 0, \qquad \sigma''_2 = 0, \qquad \sigma'''_2 = 0$$

appartiennent à un même faisceau linéaire. Il en est de même si une, deux ou

trois de ces coniques venant à se décomposer en un système de deux droites distinctes, ces systèmes considérés comme des coniques font partie, avec les autres coniques véritables, d'un même faisceau linéaire.

Si les quatre coniques σ se décomposent chacune en deux droites distinctes, la surface correspondante

$$z^2 = \sigma_1 \sigma'_1 \sigma''_1 \ldots \sigma_1^{\text{VII}}$$

admettra des cycles finis, qui seront au nombre de six, lorsque les huit droites

$$\sigma_1 = 0, \qquad \sigma'_1 = 0, \qquad \sigma''_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad \sigma_1^{\text{VII}} = 0$$

seront concourantes en un même point.

Toutes les autres surfaces du huitième degré ayant pour équation

$$z^2 = f_8(x, y)$$

ont un ordre de connexion linéaire égal à un.

En d'autres termes, les seules surfaces du huitième degré de la forme considérée, qui possèdent des cycles non tous nuls, sont représentables sur des cônes.

Remarque. — On déduit de ce qui précède qu'une surface du cinquième degré ayant un point triple et admettant des cycles finis sera représentable sur un cône cubique ou sur un cône du sixième degré.

Vu et approuvé :
Toulouse, le 27 mars 1901,

LE DOYEN DE LA FACULTÉ,
LECLERC DU SABLON.

Vu et permis d'imprimer :
Toulouse, le 28 mars 1901,

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE.
PERROUD.

SECONDE THÈSE.

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Application de la méthode de Jacobi à l'intégration des équations de la Dynamique.

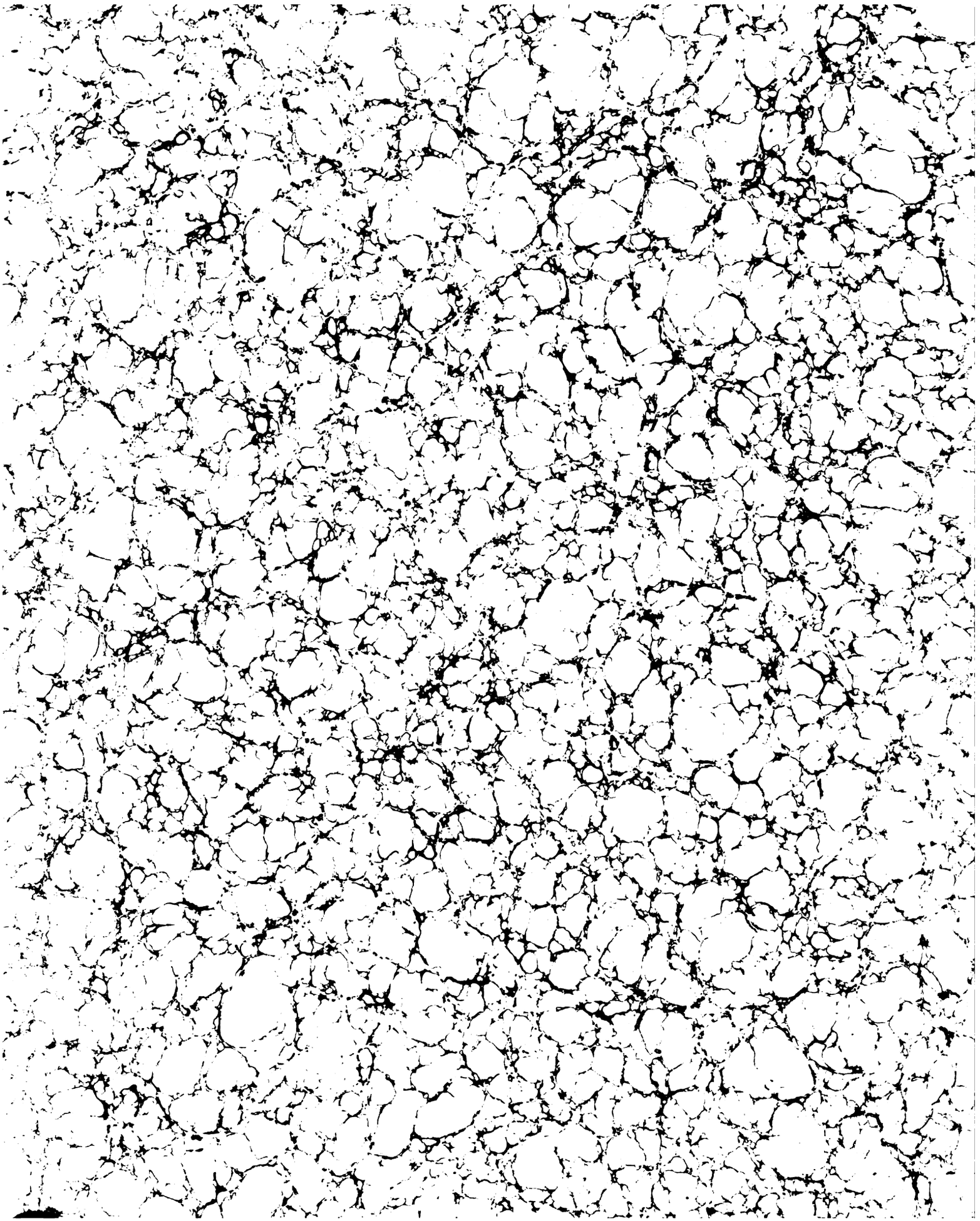
Vu et approuvé :
Toulouse, le 27 mars 1901,

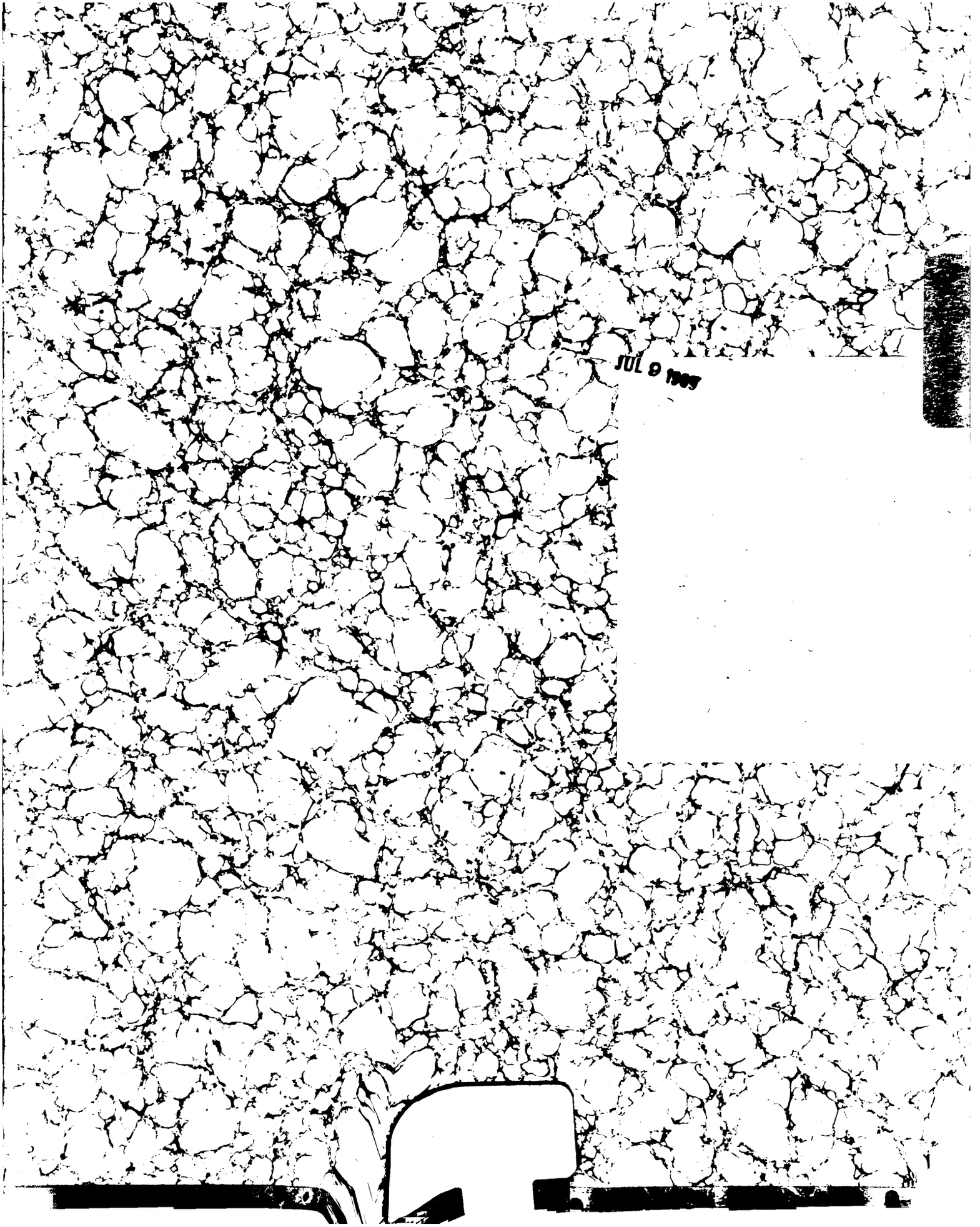
LE DOYEN DE LA FACULTÉ,
LECLERC DU SABLON.

Vu et permis d'imprimer :
Toulouse, le 28 mars 1901,

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE,
PERROUD.

30138 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.





JUL 9 1985

Math 9109.01.4
Sur la connexion lineaire de quelq
Cabot Science 003358845
3 2044 091 923 292